

Analyse I – Série 8

Echauffement. (Continuité)

Est-ce que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x > 1 \\ 3, & x \leq 1 \end{cases}$$

est continue sur \mathbb{R} ?

Sol.:

Pour $x \neq 1$, la fonction f est continue puisqu'elle est une composition de fonctions élémentaires qui sont continues sur leur domaine de définition (cf. théorème du cours). Il reste donc à vérifier si f est continue en $x = 1$, c'est-à-dire si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$. D'une part on a

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 = 3 = f(1),$$

et d'autre part, en utilisant que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 1) = 3 = f(1).$$

Ainsi f est aussi continue en $x = 1$ et donc elle est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 1. (Limites de fonctions)

Calculer les limites suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \right) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin(x^2)} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} & \end{array}$$

Aide : pour b) et d) factoriser l'expression en utilisant $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ et $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$. Pour c) et e) utiliser des formules trigonométriques.

Sol.:

1. En observant que le dénominateur divise le numérateur, on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 2).$$

Pour calculer cette limite, on utilise les propriétés algébriques :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 2x + 2 = \left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right)^2 + 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 2 = 5.$$

On peut aussi dire que la fonction $f(x) = x^2 + 2x + 2$ est continu en tant que polynôme et donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 5$.

2. On utilise la formule $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ avec $a = \sqrt[3]{x+1}$ et $b = \sqrt[3]{x}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{((x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}) \left((x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} \right)}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} = 0. \end{aligned}$$

3. En utilisant que $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$, on peut récrire le numérateur comme $\cos(x)^2 - \sin(x)^2 - 1 = -2\sin(x)^2$ et la limite devient

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin(x)^2}{\sin(x^2)} &= -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)^2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin(x^2)} \right) \\ &= -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin(x^2)} = -2 \cdot 1^2 \cdot 1 = -2 \end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (cf. cours).

4. Comme $1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$, on peut simplifier la fraction en mettant au même dénominateur pour calculer la limite :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = -\frac{3}{3} = -1, \end{aligned}$$

où on utilise de nouveau les propriétés algébriques pour calculer la dernière limite.

5. Avec une formule de trigonométrie on peut récrire le numérateur

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \cdot \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x - a} \\ &= - \left(\lim_{x \rightarrow a} \sin\left(\frac{x+a}{2}\right) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \right) = -\sin(a) \end{aligned}$$

car la deuxième limite vaut 1.

Exercice 2. (Existence de limites)

Trouver les valeurs de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour lesquelles les limites suivantes existent dans \mathbb{R} (la notation $\text{tg} \equiv \tan$ désigne la fonction tangente) :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\text{tg}(x - \alpha)^2}{(x - \alpha)^2} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^4 - 2\alpha x^3 + 4x^2}{(x - \alpha)^2}$$

Sol.:

a) Observons que $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\text{tg}(x - \alpha)^2}{(x - \alpha)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(x)^2}{x^2}$. Du cours on sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x \cdot \cos(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \right) = 1$$

car les deux limites existent et valent 1. Il suit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)^2}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} \right)^2 = 1^2 = 1$$

et donc la limite donnée existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

- b) Cette limite existe dans \mathbb{R} si et seulement si α est une racine double du polynôme au numérateur. Évalué en α , celui-ci devient

$$\alpha^4 - 2\alpha^4 + 4\alpha^2 = \alpha^2(4 - \alpha^2) = \alpha^2(2 + \alpha)(2 - \alpha).$$

Les candidats sont donc les racines de ce polynôme-ci, c.-à-d. $\alpha \in \{0, -2, 2\}$.

Pour $\alpha = 0$, le polynôme est $x^4 + 4x^2 = x^2(x^2 + 4)$ dont 0 est bien une racine double.

Pour $\alpha = \pm 2$, on a

$$x^4 \mp 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 \mp 4x + 4) = x^2(x \mp 2)^2$$

et donc 2 et -2 sont des racines doubles respectives.

Ainsi la limite existe si et seulement si $\alpha \in \{-2, 0, 2\}$.

Exercice 3. (Continuité)

Etudier la continuité de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $x = 0$:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 2^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) = \begin{cases} \cos(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} & \text{d) } f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Sol.:

- a) On calcule les limites de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$ des deux côtés en introduisant une nouvelle variable u tel que $x = \frac{1}{u}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{u \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + 2^u} = 1 = f(0), \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{u \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 2^u} = 0 \neq f(0). \end{aligned}$$

Donc f n'est pas continue mais seulement continue à gauche en $x = 0$ (Fig. 1).

- b) Cette limite a été vue en cours. Notons que f est paire parce que les fonctions $1 - \cos(x)$ et x^2 sont paires. Ainsi il suffit de considérer la limite à droite (ou celle à gauche). On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)^2}{x^2(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \cos(x)} \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f(0), \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ($= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$) (cf. cours) et la décomposition en produit de deux limites est valable parce que les deux limites existent. Ainsi f est continue en $x = 0$.

c) Considérons les suites (x_n) et (y_n) définies respectivement par $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Ces suites satisfont $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ mais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n\pi) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0.$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas et f n'est pas continue en $x = 0$ (Fig. 2).

d) Comme la fonction sinus prend des valeurs dans $[-1, 1]$, on a

$$-|x| \leq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|.$$

Par le théorème des deux gendarmes, puisque $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0 = f(0).$$

Ainsi f est continue en $x = 0$ (Fig. 3).

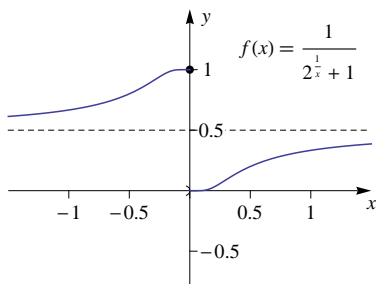


FIGURE 1 –

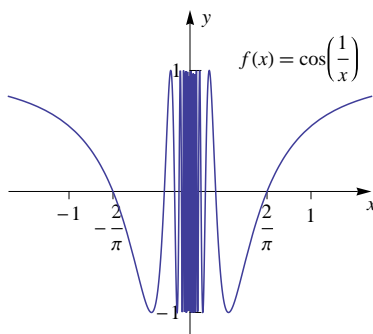


FIGURE 2 –

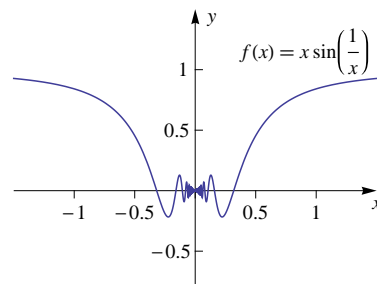


FIGURE 3 –

Exercice 4. (Continuité avec partie entière)

Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 3 \cdot [x(2-x)] + a \cdot [\cos(\pi(x-1))]$$

est-elle continue en $x = 1$?

Rappel : Ici, $[\cdot]$ représente la partie entière d'un nombre réel u , donnée par $[u] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq u\}$.

Sol.: On a $f(1) = 3 \cdot [1] + a \cdot [1] = 3 + a$.

Pour étudier f dans le voisinage de 1, considérons $x = 1 \pm \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. On a

$$f(1 \pm \varepsilon) = 3[(1 \pm \varepsilon)(1 \mp \varepsilon)] + a \cdot [\cos(\pm\pi\varepsilon)] = 3[1 - \varepsilon^2] + a \cdot [\cos(\pi\varepsilon)] = 3 \cdot 0 + a \cdot 0 = 0.$$

En laissant $\varepsilon \rightarrow 0$, il suit que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$. Donc f est continue en $x = 1$ si et seulement si $f(1) = 0$, c'est-à-dire si $a = -3$.

Exercice 5. (Prolongement par continuité)

Trouver, s'il existe, le prolongement par continuité de la fonction f au point x_0 , ou alors montrer que f ne peut être prolongée par continuité en x_0 .

a) $f: [0, 1[\cup]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}} \quad \text{en } x_0 = 1$

b) Soit $A = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)^{-1} : n \in \mathbb{N} \right\}, f:]0, 1] \setminus A \rightarrow \mathbb{R},$
 $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2 \right) \quad \text{pour } x_0 \in A \cup \{0\}$

c) $f:]1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x(x-1) \operatorname{tg}(x-1)}{x^3 - 3x + 2} \quad \text{en } x_0 = 1$

Sol.:

a) Comme l'expression de f n'est pas définie en $x = 1$, on doit calculer sa limite en ce point. Pour $x \neq 1$, on peut écrire, en utilisant $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{3}}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{3}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x}{2(x-1)} \cdot \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x}} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

et donc le prolongement par continuité de f est

$$\hat{f}_1: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}_1(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{3}}, & x \neq 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4}, & x = 1 \end{cases}$$

Remarque : Le prolongement par continuité s'écrit en fait aussi sans distinction de cas :

$$\hat{f}_1: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}_1(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x}}.$$

b) Comme l'expression de f n'est pas définie pour $x \in A \cup \{0\}$, il faut passer aux limites. Pour ceci, remarquons qu'on obtient pour $x \notin A \cup \{0\}$ avec un peu de trigonométrie

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2 \right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)^2 = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Soit $a_n = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)^{-1} \in A$. Alors on a

$$\lim_{x \rightarrow a_n} f(x) = \lim_{x \rightarrow a_n} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n \cdot 0 = 0,$$

c'est-à-dire f peut être prolongée par continuité pour tout $a \in A$. Pour $x = 0$ on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2}{x}\right) \quad \text{qui n'existe pas.}$$

Comme la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas, f ne peut être prolongé par continuité en $x = 0$. Le prolongement par continuité de f est donc

$$\hat{f}_A:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}_A(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)^2 \right), & x \notin A \\ 0, & x \in A \end{cases}$$

ou, sans séparation des cas, $\hat{f}_A:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}_A(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right).$

c) L'expression de f n'étant pas définie pour $x = 1$, on veut calculer la limite. Comme le dénominateur de f s'écrit $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1) \operatorname{tg}(x-1)}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1) \operatorname{tg}(x-1)}{(x-1)^2(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x+2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x+2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sin(x-1)}{(x-1)} \cdot \frac{1}{\cos(x-1)} \right) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(Attention : La décomposition en produit de deux limites à la deuxième ligne est valable parce que les deux limites existent.)

Ainsi le prolongement par continuité de f est

$$\hat{f}_1: [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}_1(x) = \begin{cases} \frac{x(x-1) \operatorname{tg}(x-1)}{x^3 - 3x + 2}, & x > 1 \\ \frac{1}{3}, & x = 1 \end{cases}$$

Notez que ce prolongement par continuité ne s'écrit pas sans séparation des cas.

Exercice 6. (Fonctions avec limites)

Etudier la continuité de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\text{a) } f(x) = \operatorname{Arcsin} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)^{2n}}{1 + \sin(x)^{2n}} \right) \quad \text{b) } f(x) = x^4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^{2n} + 1}$$

Sol.:

a) On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)^{2n}}{1 + \sin(x)^{2n}} = \begin{cases} 1, & x = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)^{2n}}{1 + \sin(x)^{2n}} \right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi f n'est pas continue aux points $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et continue partout ailleurs.

b) Comme x^4 est continue, on regarde la valeur de la limite en fonction de x . Comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \infty, & x > 1 \\ \text{n'existe pas,} & x \leq -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = \pm 1 \\ \infty, & x > 1 \text{ ou } x < -1 \end{cases}$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^{2n} + 1} = \begin{cases} -1, & -1 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ \text{n'existe pas,} & x = -1 \\ 0, & x > 1 \text{ ou } x < -1 \end{cases}$$

Ainsi f n'est pas continue en $x = \pm 1$ (en fait elle est seulement continue à droite en $x = 1$) et continue partout ailleurs.

Exercice 7. (QCM : Limite d'une fonction) La limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sin(2x)}$$

est égale à

- $+\infty$
 1
 0
 $1/3$

Sol.

On va appliquer le théorème des deux gendarmes pour les fonctions. On a $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 \leq x + \sin(2x) \leq x + 1$ donc pour $x > 1$ (il est suffisant de considérer $x > 1$ car on s'intéresse à la limite pour $x \rightarrow \infty$) on a

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{x}{x+\sin(2x)} \leq \frac{x}{x-1}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-1/x} = 1$. Donc par le théorème des deux gendarmes pour les fonctions on a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+\sin(2x)} = 1$.

Exercice 8. (QCM : Limite d'une suite (révisions))

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ si et seulement si

- Il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n > n_0, n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n - l| \leq \varepsilon$.
- Pour tout $\xi > 0$, il existe un nombre naturel n_0 et une infinité des nombres naturels $n > n_0$ tels que $|a_n - l| \leq \xi$.
- Quel que soit $x > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > m, n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n - l| \leq 2x$.
- Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout naturel $n > \frac{1}{\varepsilon}$, on a $|a_n - l| \leq \varepsilon$.

Sol.:

- FAUX : Prendre $a_n = (-1)^n, l = 0, \varepsilon = 1, n_0 = 0$. La propriété i) est bien respectée mais $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.
- FAUX : Prendre $a_n = (-1)^n$ et $l = 1$. Alors pour tout $\xi > 0$ et $n_0 = 0$, pour tout $n = 2k$ naturels pairs, on a $|a_{2k} - l| = |1 - 1| = 0 < \xi$, mais la suite ne converge pas.
- VRAI : Il s'agit exactement de la définition de la limite d'une suite si l'on pose $\varepsilon = 2x$.
- FAUX : Prendre $a_n = \frac{3}{n} \forall n \geq 1$ et $\varepsilon = 2$. On a $|a_1 - 0| = 3 > \varepsilon$. La suite a_n converge vers 0, mais la propriété iv) n'est pas respectée. Une autre exemple : prendre $a_0 = 1, a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \forall n \geq 1$. La suite (a_n) converge vers 0. Mais si on prend $\varepsilon = \frac{1}{3}$, alors on a $4 > \frac{1}{\varepsilon}$ et $|a_4 - 0| = \frac{1}{2} > \varepsilon$. En général, la propriété n'est pas respectée pour les suites qui convergent moins vite que $\frac{1}{n}$. Par contre, propriété iv) implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

Exercice 9. (Limites à gauche et à droite)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soit $x^* \in I$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x^*+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x^*-} f(x) = \ell$ (en utilisant les définitions qui font intervenir les suites).

Sol.

Preuve de “ \Rightarrow ”.

Si $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = \ell$ alors pour toute suite (u_n) telle que $u_n \in I \setminus \{x^*\}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x^*$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \ell$. Cela est vrai en particulier si la suite (u_n) satisfait de plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > x^*$ (respectivement $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < x^*$) donc $\lim_{x \rightarrow x^*+} f(x) = \ell$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow x^*-} f(x) = \ell$).

Preuve de “ \Leftarrow ”.

Soit une suite (u_n) telle que $u_n \in I \setminus \{x^*\}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x^*$. En supposant $\lim_{x \rightarrow x^*+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x^*-} f(x) = \ell$, on veut montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$ existe et vaut ℓ .

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, on a $u_n > x^*$ (ou bien $\forall n \geq n_0$, on a $u_n < x^*$) alors par hypothèse on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \ell$.

Sinon on peut extraire de (u_n) la suite (u_n^-) de tous les $u_n > x^*$ et la suite (u_n^+) de tous les $u_n < x^*$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^- = x^*$. Puisque, par hypothèse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n^+) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n^-) = \ell,$$

pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a à la fois $|f(u_n^+) - \ell| \leq \varepsilon$ et $|f(u_n^-) - \ell| \leq \varepsilon$, et donc pour $n \geq n_0$, $|f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$.