Corrigé série 8

Exercice 1 (10 points)

a) $f'(x) = 3(2x^2+3x-5)^2(4x+3)$

b) $g'(x) = \left((x^2+5x-4)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+5x-4)^{-\frac{1}{2}}(2x+5) = \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x-4}}$

c) $h'(x) = 2\left(\frac{x-1}{3x+2}\right) \cdot \frac{1\cdot(3x+2)-(x-1)\cdot 3}{(3x+2)^2} = 2\left(\frac{x-1}{3x+2}\right) \cdot \frac{5}{(3x+2)^2} = \frac{10(x-1)}{(3x+2)^3}$

d) $l'(x) = \frac{3\cdot(2x-1)^2\cdot 2\cdot(5x+1)^4-(2x-1)^3\cdot 4\cdot(5x+1)^3\cdot 5}{(5x+1)^8}$
$= \frac{2(2x-1)^2(5x+1)^3[3(5x+1)-10(2x-1)]}{(5x+1)^8} = \frac{2(2x-1)^2(-5x+13)}{(5x+1)^5}$

e) $m'(x) = \left(3(2\sin(x)\cos(x))^{\frac{1}{2}}\right)' = 3\cdot\frac{1}{2}(2\sin(x)\cos(x))^{-\frac{1}{2}}\cdot(2\cos(x)^2-2\sin(x)^2)$
$= 3\cdot\frac{\cos(x)^2-\sin(x)^2}{\sqrt{2}\sqrt{\cos(x)\sin(x)}} = 3\cdot\frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$

f) $u'(x) = ((1-x)(x-3)^4)' = (-1)\cdot(x-3)^4+(1-x)\cdot 4(x-3)^3 = (x-3)^3[-(x-3)+4(1-x)]$
$= (x-3)^3[-x+3+4-4x] = (x-3)^3(-5x+7)$

g) $v'(x) = ((x+x^2)^{-5})' = -5(x+x^2)^{-6}\cdot(1+2x) = \frac{-5(1+2x)}{(x+x^2)^6} = \frac{-5(1+2x)}{x^6(1+x)^6}$

h) $w'(x) = \left(\frac{(3x+1)^2}{(x+2)^3}\right)' = \frac{2(3x+1)\cdot 3\cdot(x+2)^3-(3x+1)^2\cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6}$
$= \frac{3(3x+1)(x+2)^2[2(x+2)-(3x+1)]}{(x+2)^6} = \frac{3(3x+1)(x+2)^2[2x+4-3x-1]}{(x+2)^6}$
$= \frac{3(3x+1)(x+2)^2(-x+3)}{(x+2)^6} = \frac{3(3x+1)(-x+3)}{(x+2)^4}$

Exercice 2 (5 points)

a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) Comme $\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right| \leq x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on peut définir $f(0)=0$.

c) On a

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + x^2\cdot\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}.$$

d) On a

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}.$$

Or,

$$0 \le \left| x\cos\frac{1}{x} \right| \le |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Ainsi, $f'(0) = 0$.

e) On a

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

qui diverge.

Exercice 3 (5 points)

La dérivée de f est

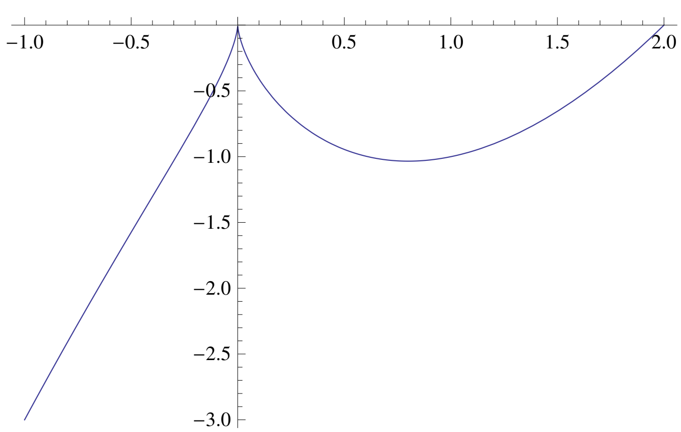
$$f'(x) = 1\cdot x^{2/3} + (x-2)\cdot\frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{3x + 2(x-2)}{3\cdot x^{1/3}} = \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Ainsi, l'unique point stationnaire de f est $4/5$. Comme f est continue, les candidats possibles d'extrema sont donc

$$-1, \quad 0, \quad \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad 2.$$

Or, $f(-1) = -3, \quad f(0) = f(2) = 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}.$

Ainsi, f atteint son minimum (global) au point $x = -1$ et son maximum (global) aux points $x = 0$ et $x = 2$, comme on peut le vérifier sur le graphe :

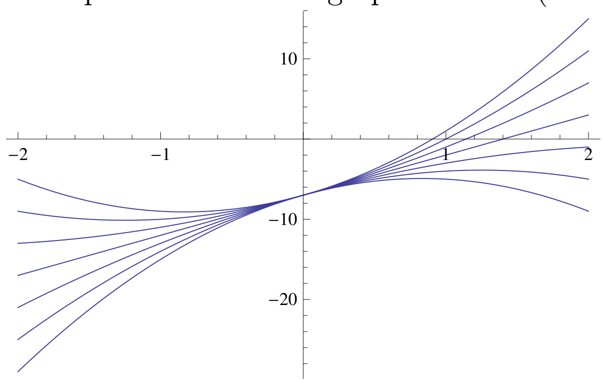


De plus, une simple étude du signe de la dérivée f' montre que f est croissante sur $[-2, 0[$, décroissante sur $]0, 4/5]$, puis à nouveau croissante sur $[4/5, 2]$. Ainsi le point $x = 4/5$ est un minimum local de f.

Exercice 4 (5 points)

On constate que les paraboles de cette famille n'ont que le point $(0, -7)$ en commun. En effet, si $a \neq b$ et $ax^2 + 5x - 7 = bx^2 + 5x - 7$, alors $x^2(a - b) = 0$ et donc $x = 0$. De plus, leurs dérivées en ce point valent toutes 5. Ainsi, elles sont tangentes entre elles.

On a représenté plusieurs de ces paraboles dans le graphe suivant (en laissant a varier de -3 à 3).



Exercice 5 (10 points)

a) Vrai. Supposons que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ait en tout point une dérivée négative ($f' \leq 0$) et montrons que f est alors décroissante.

Soient $x, y \in [a, b]$ avec $x < y$. On doit vérifier qu'alors $f(x) \geq f(y)$.

Par le théorème des accroissements finis, il existe un point $c \in [x, y]$ tel que

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \leq 0.$$

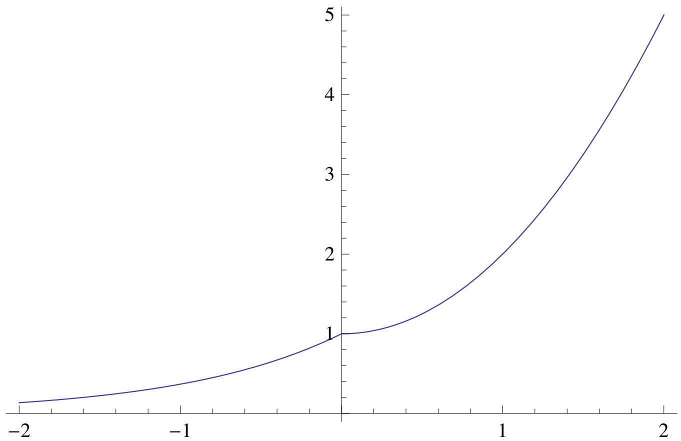
De cela, on déduit directement que

$$f(x) \geq f(y).$$

b) Faux. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0, \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que cette fonction n'admet pas de dérivée en $x = 0$; pourtant, il ne s'agit pas d'un extremum local.



c) Vrai. Si f et g sont deux fonctions réelles dérivables ayant la propriété $f' = g'$, alors $f' - g' = 0$, ce qui signifie que $f - g$ est une constante, donc

$$f - g = c$$

pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

Dès lors, comme la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x$$

a pour dérivée $x + 1$, toutes les autres fonctions ayant aussi $x + 1$ comme dérivée seront de la forme

$$\frac{1}{2}x^2 + x + c,$$

pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

d) Faux. On a

$$(\cos(x) + c)' = -\sin(x)$$

pour tout réel c.

e) Vrai. La continuité de f (conséquence de sa dérivabilité) implique que l'on peut étendre l'hypothèse de la manière suivante : f est croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, \infty[$. Comme la dérivée de f existe en 0, on a que les deux limites

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

sont égales à $f'(0)$. Or

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \geq 0,$$

ainsi $0 \leq f'(0) \leq 0$.

Exercice 6 (5 points)

On utilise la règle de Bernoulli-L'Hospital tout au long de cet exercice sans la mentionner explicitement.

a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin(x)-\cos(x)}{\tan(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+\sin(x)}{1+\tan^2(x)}=1.$$

b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{2x+3}=\frac{2}{3}.$$

c)
$$\lim_{x\to\infty} x-\sqrt{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{1-1/x}}{1/x}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\sqrt{1-h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\sqrt{1-h}}=\frac{1}{2}.$$

Exercice 7 (5 points)

a) Il faut voir que $g'<0$ sur l'intervalle considéré. On a
$$g'(x)=1-(1+\tan^2(x))=-\tan^2(x)<0$$
sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.

b) On utilise à nouveau la dérivation :
$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)'=\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}.$$
Or, sur l'intervalle considéré, la condition
$$x\cos(x)-\sin(x)<0$$
revient à $x-\tan(x)<0$, ce qui est vrai par le premier point.

c) L'inégalité se réécrit
$$\frac{\sin(b)}{b}<\frac{\sin(a)}{a}.$$

d) L'inégalité $\dfrac{b}{\sin(b)}<\dfrac{\pi}{2}$ découle du point 2 (direct), on a donc
$$\frac{b}{\sin(b)}<\frac{\pi}{2}\qquad\text{et}\qquad\sin(a)<a.$$
En multipliant membre-à-membre, on conclut.

Exercice 8 (5 points)

On procède selon l'indication : on calcule

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a) \text{ et}$$
$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = f(a).$$

Ainsi, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
On calcule $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, donc $0 = g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Cela se réécrit $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exercice 9 (5 points)

Soit f une fonction réelle dérivable s'annulant aux points

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{k+1}$$

pour un $k \in \mathbb{N}$.
Pour $i = 1, \ldots, k$, l'égalité $f(x_i) = f(x_{i+1})$ implique que, par le théorème de Rolle, il existe $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f'(c_i) = 0$. Ainsi, f' s'annule en au moins k points.
Supposons maintenant que f soit une fonction polynomiale de degré $n > 1$ et, par l'absurde, disons que f admet $n+1$ racines distinctes.
Alors on en déduite successivement que f' admet n racines, que f'' admet $n-1$ racines, etc.
On obtient finalement que $f^{(n-1)}$ admet $n+1-(n-1) = 2$ racines, ce qui est absurde puisqu'il s'agit d'une fonction affine.

Exercice 10 (5 points)

On commence par remarquer que si f admet trois racines alors, par un raisonnement similaire à celui exposé dans l'exercice 9, on aura que sa dérivée admet deux racines. Cela contredirait le fait que comme la dérivée de f est

$$f'(x) = nx^{n-1} + a$$

et que $n-1$ est impair, l'équation $f'(x) = 0$ n'admet qu'une unique solution réelle.