V. Exponentielle et logarithme

Aujourd'hui nous revenons de manière plus rigoureuse sur les fonctions exponentielles et logarithmes vues rapidement dans le chapitre sur la continuité. Nous en profiterons pour calculer les dérivées, ce qui étoffera notre catalogue de fonctions "élémentaires" que nous savons dériver.

1 L'exponentielle

Pour construire ce cours sur des bases solides, revenons sur la définition de e^x.

Lemme 1.1. *Lorsque $m > 2x - 1$, on a $\dfrac{x^{m+k}}{(m+k)!} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \dfrac{x^m}{m!}$ pour tout $k \geq 1$.*

Démonstration. On démontre cela par récurence sur k. Lorsque $k = 1$, on a

$$\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{x}{m+1} \cdot \frac{x^m}{m!} < \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \frac{x^m}{m!}$$

$m > 2x - 1$
$\iff m+1 > 2x$
$\iff \dfrac{x}{m+1} < \dfrac{1}{2}$

Supposons maintenant que l'inégalité est vraie pour $1, 2, \ldots, k$ et montrons qu'elle est aussi vraie pour $k+1$:

$$\frac{x^{m+k+1}}{(m+k+1)!} = \overbrace{\frac{x}{m+k+1}}^{< \frac{x}{m+1} < \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{x^{m+k}}{(m+k)!}}_{\text{H.R} < \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{x^m}{m!}} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{x^m}{m!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot \frac{x^m}{m!}$$

ce qui conclut la démonstration. □

Proposition 1.2. *Pour tout nombre réel x, la suite $z_r = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{r} \frac{x^n}{n!}\right)$ converge.*

Démonstration. Effectuons la démonstration lorsque x est positif.
Dans ce cas, la suite z_r est croissante. Il suffit donc de montrer qu'elle est bornée pour en conclure qu'elle converge. On choisit un nombre entier $m > 2x - 1$ et on écrit

$$z_r = \underbrace{z_m}_{\text{somme finie donc bornée}} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{r} \frac{x^n}{n!}}_{\text{Montrer que cette somme est bornée lorsque } r \to \infty.}$$

où $m < r$
et $m > 2x - 1$

$$\sum_{n=m+1}^{r} \frac{x^n}{n!} \underset{n=m+k}{=} \sum_{k=1}^{r-m} \frac{x^{m+k}}{(m+k)!} \overset{\text{lemme 1.1}}{<} \sum_{k=1}^{r-m} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{x^m}{m!} = \frac{x^m}{m!} \underbrace{\sum_{k=1}^{r-m} \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{\xrightarrow{r \to \infty} 1}$$

Puisque $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$, $z_r = z_m + \sum \dots < z_m + \frac{x^m}{m!}$

Ainsi, (z_r) est croissante et majorée, donc converge si $x \geqslant 0$. et si $x < 0$, (z_r) est alternée et converge car $(|z_r|)$ converge. □

Ce résultat permet de poser la définition suivante.

Définition 1.3. Pour tout nombre réel x, le nombre e^x est défini par

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \overset{x \neq 0}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}$$

La *fonction exponentielle* est la fonction réelle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\exp(x) = e^x$.

Les propriétés bien connues de croissance exponentielle peuvent être maintenant démontrées rigoureusement.

$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

Proposition 1.4. *On a* $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$. *De plus,* $\exp(x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Développons l'expression du produit des exponentielles $\exp(x) \cdot \exp(y)$:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^k y^m}{k!m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k+m}{k} \frac{x^k y^m}{(k+m)!}$$

car $\binom{k+m}{k} = \frac{(k+m)!}{k!\,m!}$ $\iff \frac{1}{k!\,m!} = \binom{k+m}{k} \cdot \frac{1}{(k+m)!}$

On regroupe les termes de degré $k+m = n$:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).$$

Binôme de Newton : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$

Pour le calcul de l'inverse, on remarque que $1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$ $\Longrightarrow e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
Finalement, puisque $\exp(x) = \exp(x/2 + x/2) = (\exp(x/2))^2$ est un carré, il doit être positif. □

Exemple 1.5. Nous aimerions comprendre le lien entre $\exp(x)$ et e^x, où e est le nombre d'Euler. Par définition, on a $\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$.

D'autre part, nous avons défini e comme étant la limite lorsque n tend vers l'infini de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Pourquoi les deux limites $\exp(1)$ et e coïncident-elles ?

Le développement de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ donne $1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$

$$\text{Or, } \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \, \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ facteurs} \leq n}}{\underbrace{n^k}_{k \text{ facteurs } n}} < \frac{1}{k!} \cdot 1 = \frac{1}{k!}$$

Ainsi $e \leq \exp(1)$. Finalement, fixons m et considérons la suite (y_n) où

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} + \dots + \frac{1}{m!}\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{n^{m-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad \text{pour } n > m.$$

Lorsque n tend vers l'infini cette suite tend vers $1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{m!}$.

Puisque $y_n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, les limites aussi satisfont l'inégalité $1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{m!} \leq e$.

Ainsi, lorsque m tend vers l'infini on a $\exp(1) \leq e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

La limite considérée est donc à la fois plus grande et plus petite que e, il s'agit donc de e, qui vaut environ $2,718281828459045235360287471352662 5...$

2 Etude de la fonction exponentielle

Proposition 2.1. *La fonction exponentielle est dérivable donc continue. De plus* $\exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration. Calculons la dérivée à l'aide de la somme définissant l'exponentielle :

$$(e^x)' = \left(1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)'$$

$$= 0 + 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cancel{n} \cdot x^{n-1}}{\cancel{n}(n-1)!} \overset{m=n-1}{=} 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$$

La dérivée est ainsi calculée, ce qui prouve que la fonction est dérivable, et donc continue. □

Proposition 2.2. *On a* $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
De plus, la fonction exponentielle admet une asymptote horizontale à gauche d'équation $y = 0$.

Démonstration. Si on a un entier $N > 0$, choisissons $x > 2N$. Alors

$$e^x > e^{2N} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2N)^n}{n!} > \frac{(2N)^N}{N!} = 2^N \cdot \overset{>1}{\frac{N^N}{N!}} > 2^N. > N$$

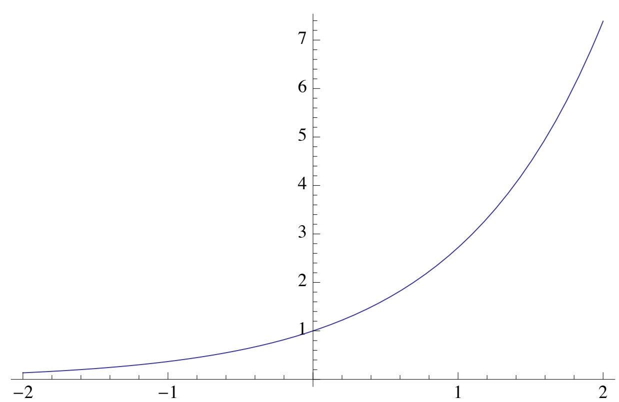
Ainsi e^x tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini. Lorsque x tend vers moins l'infini, on utilise le fait que $e^{-x} = 1/e^x$ pour conclure que e^x tend vers zéro. □

Pour terminer notre étude de fonction, étudions la croissance et la convexité.

Proposition 2.3. *La fonction exponentielle est strictement croissante et convexe sur* $\mathbb{R}$.
De plus, il s'agit d'une bijection entre $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. La dérivée de e^x est e^x, une fonction strictement positive par définition. Par conséquent l'exponentielle est strictement croissante. Sa dérivée seconde est encore égale à e^x, strictement positive, si bien que l'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Pour terminer, par continuité, le théorème de la valeur intermédiaire s'applique et l'exponentielle est surjective sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est injective car strictement croissante. □

Voici le graphe de la fonction exponentielle :



Vous étudierez les fonctions $exp_a(x) = a^x$ en exercice.

3 La fonction logarithme

La fonction logarithme $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de l'exponentielle. On l'appelle aussi *logarithme népérien* pour le distinguer des autres fonctions logarithmiques que nous verrons tout à l'heure. Vous avez déjà vu l'année passée que les propriétés élémentaires de l'exponentielle se traduisent pour le logarithme :

1. $\ln(xy) =$ $\ln(x) + \ln(y)$
2. $\ln(1) =$ 0 et $\ln(e) =$ 1 car $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
3. la fonction ln est strictement croissante ;
4. $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Nous savons aussi qu'elle est aussi continue et dérivable, étant la fonction réciproque d'une fonction dérivable.

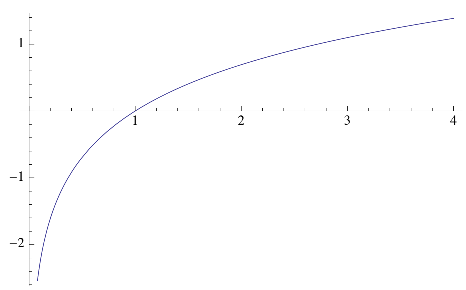
Proposition 3.1. *La dérivée de la fonction* ln *est la fonction* $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Démonstration. Il suffit de calculer la dérivée avec la méthode vue pour les fonctions réciproques :

Si $x = f(y) = e^y$, et donc $y = \ln(x)$,

$$(\ln(x))' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$ □

Voici le graphe de la fonction ln :



Il est parfois utile de travailler avec des fonctions logarithmiques définies sur d'autres "bases" que e, les plus courantes étant la base 2 et la base 10.

Définition 3.2. Pour tout nombre réel positif $a \neq 1$, la *fonction logarithme de base* a est la fonction réelle $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Exemple 3.3. Puisque $\ln(e) = 1$, $\log_e$ n'est rien d'autre que le logarithme népérien ln.
On a toujours $\log_a(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$.

4 La fonction puissance

Nous savons définir et étudier les fonctions puissance entière $x \mapsto x^n$, où n est un entier, et puissance rationnelle $x \mapsto x^r$, où r est un nombre rationnel.
Nous remarquons que $x^n = \left(e^{\ln(x)}\right)^n = e^{n\ln(x)}$

On définit donc les fonctions puissances de la manière suivante :

Définition 4.1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la *fonction puissance α-ième* $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ est définie par

$$f_\alpha(x) = e^{\alpha\ln(x)} = x^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\ln(x))^k}{k!}$$

Théorème 4.2. *La dérivée de la fonction puissance est $f'_\alpha(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$.*
Cette fonction est donc strictement croissante pour $\alpha > 0$ et strictement décroissante pour $\alpha < 0$.

Démonstration.

Voyons f_α comme composition de fonctions :

$$x \overset{u}{\longmapsto} \alpha\ln(x) = y \overset{v}{\longmapsto} e^y = e^{\alpha\ln(x)} \qquad f_\alpha = (v\circ u)$$

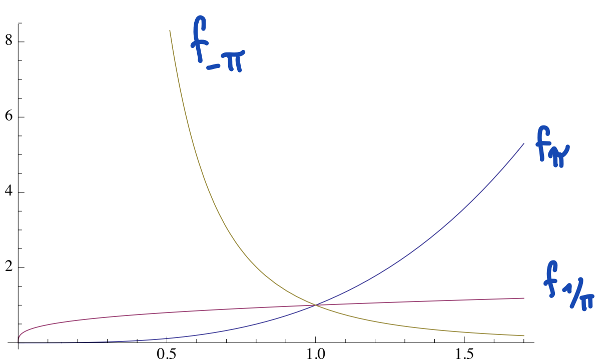
Ainsi, $f'_\alpha(x) = v'(u(x))\cdot u'(x) = e^{\alpha\ln(x)}\cdot\frac{\alpha}{x}$

$$= e^{\alpha\ln(x)}\cdot\frac{\alpha}{e^{\ln(x)}} = \alpha\cdot e^{\alpha\ln(x)-\ln(x)} = \alpha\, e^{\ln(x)(\alpha-1)}.$$

Comme $e^{\cdots} > 0$, si $\alpha > 0$, $f'_\alpha(x) > 0$ et f_α est strictement croissante
et si $\alpha < 0$, $f'_\alpha(x) < 0$ et f_α est strictement décroissante

□

On voit ci-dessous le graphe des fonctions puissance pour $\alpha = \pi, -\pi, 1/\pi$:



Pour terminer avec les exponentielles, les logarithmes et les puissances, nous allons comparer le comportement asymptotique de ces fonctions. L'année passée, vous aviez eu beaucoup de peine à expliquer pourquoi e^x croît plus vite que x. A présent, grâce à la règle de Bernoulli-L'Hospital, cela devient un jeu d'enfants !

Théorème 4.3. *Si* $\alpha > 1$, *on a* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty$ *et* $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

Démonstration. Choisissons un entier $n > \alpha$, qui existe puisque $\mathbb{R}$ est archimédien.
Alors $x^n = e^{n\ln(x)} > e^{\alpha\ln(x)} = x^\alpha$ car la fonction exp est strictement croissante.

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} \geq \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} \overset{\frac{\infty}{\infty}\to B.H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = \dots = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$$

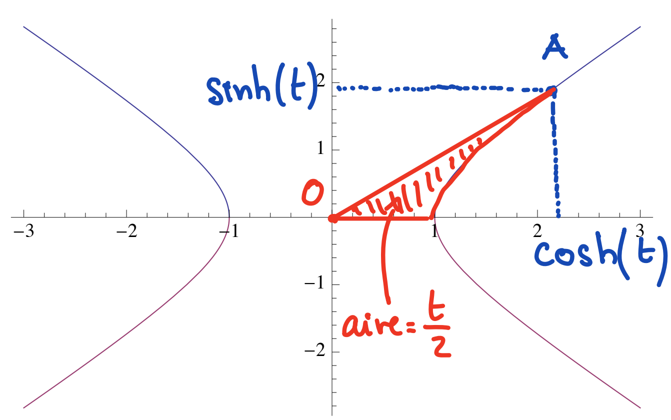
La deuxième limite est encore plus facile à calculer puisqu'il suffit d'appliquer la règle de Bernoulli-L'Hospital une unique fois :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \overset{B.H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

□

5 Trigonométrie hyperbolique

Les fonctions trigonométriques se lisent sur le cercle unité et les fonctions sinus et cosinus permettent de paramétrer ce cercle. Si l'on remplace le cercle unité par une hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ on obtient les fonctions trigonométriques ... hyperboliques, eh oui !
La surprise est qu'elles peuvent se formuler de manière paramétrique à l'aide de l'exponentielle !



$A\left(\cosh(t)\,;\,\sinh(t)\right)$

$\frac{t}{2}$ = aire algébrique

Définition 5.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

On appelle ces fonctions le *sinus hyperbolique* et le *cosinus hyperbolique*.

Propriétés :

. $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -\dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh(-x)$ est impaire

. $\cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh(x)$ est paire.

De plus, $2\cosh(x) = (e^x + e^{-x}) \cdot \dfrac{e^x}{e^x} = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^x} = \underbrace{\dfrac{(e^x - 1)^2}{e^x}}_{\geqslant 0} + \dfrac{2\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} \geqslant 2$

Donc, $\cosh(x) \geqslant 1$

Proposition 5.2. *On a pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\quad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$

$x^2 - y^2 = 1$

Démonstration. Il suffit de faire le calcul en se souvenant des règles de calcul avec l'exponentielle :

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\cancel{e^{2t}} + 2e^t \cdot e^{-t} + \cancel{e^{-2t}} - (\cancel{e^{2t}} - 2e^t \cdot e^{-t} + \cancel{e^{-2t}})}{4} = \frac{2+2}{4} = 1.$$

□

Ainsi pour $t \geq 0$, les points $(\cosh t, \sinh t)$ parcourent l'arc d'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ contenu dans le premier quadrant.

Par analogie avec les fonctions trigonométriques classiques, on définit les quotients suivants :

Définition 5.3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et $\coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ si $x \neq 0$.

On appelle ces fonctions la *tangente hyperbolique* et la *cotangente hyperbolique*.

Exemple 5.4. Effectuons par exemple l'étude de la fonction tangente hyperbolique. Il s'agit d'une fonction impaire dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$. En effet

$$\tanh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = -\tanh x$$

— Asymptotes :

$ED(\tanh) = \mathbb{R} \Rightarrow$ pas d'AV

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 \Rightarrow AHD : y = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^{x}}{e^{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1 \Rightarrow AHG : y = -1$$

— Dérivée :

$$(\tanh(x))' = \frac{\cdot\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{\cdot\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \tanh(x)^2$$

$= 1$ $\quad$ $= \tanh(x)^2$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

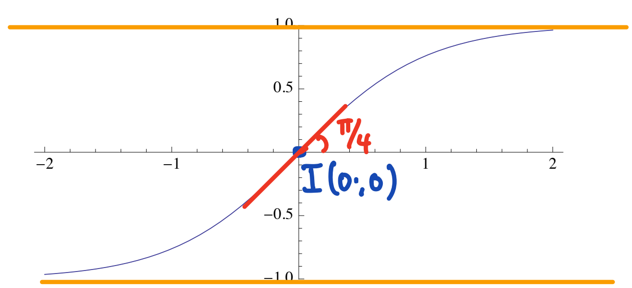
$$= \frac{\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2}{\cosh(x)^2} = \frac{1}{\cosh(x)^2} > 0 \Rightarrow \tanh \text{ strictement croissante.}$$

— Dérivée seconde :

$$(\tanh(x))'' = (1 - \tanh(x)^2)' = -2\tanh(x) \cdot \frac{1}{\cosh(x)^2}$$

x		0	
$(\tanh(x))''$	$+$	$\vert$	$-$
$\tanh(x)$		$Inf(0;0)$	

Voici son graphe :



La pente de la tangente en l'origine vaut 1, le graphe fait donc un angle de $\pi/4$ avec l'axe horizontal.

$$\text{cotanh}(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$$

AV : $x = 0$

Même AH que $\tanh(x)$.