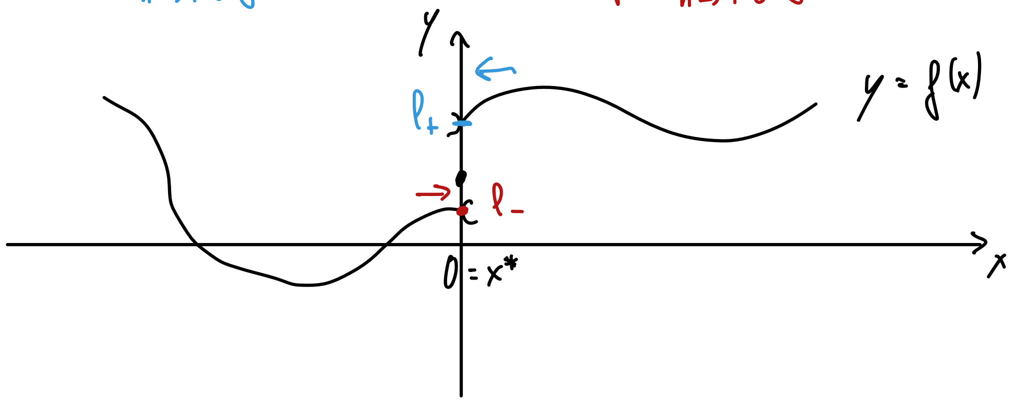
Déf : (limites à droite et à gauche). On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ admet pour limite à droite $\ell_+ \in \mathbb{R}$ (resp. à gauche $\ell_- \in \mathbb{R}$) quand x tend vers x^* si pour toute suite (x_n), $x_n \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $x_n > x^*$ (resp. $x_n < x^*$) et telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x^*$, la suite $(f(x_n))$ converge

et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell_+$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell_-$).



__Notation :__

$$\lim_{x\to x^*_+} f(x) = \lim_{\substack{x\to x^* \\ x > x^*}} f(x) = \ell_+ \quad : \text{ limite à droite}$$

$$\lim_{x\to x^*_-} f(x) = \lim_{\substack{x\to x^* \\ x < x^*}} f(x) = \ell_- \quad : \text{ limite à gauche}$$

__Prop :__

$$\lim_{\substack{x\to x^* \\ x > x^*}} f(x) = \ell_+ = \ell_- = \lim_{\substack{x\to x^* \\ x < x^*}} f(x)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{x\to x^*} f(x) \overset{\text{existe}}{=} \ell_+ = \ell_-$$

__Proposition (propriétés algébriques sur les limites) :__

Si $\lim_{x\to x^*} f(x) = a$ et $\lim_{x\to x^*} g(x) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$

Alors :

- Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x^*} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha a + \beta b$
- $\lim_{x\to x^*} f(x)\cdot g(x) = a \cdot b$
- $\lim_{x\to x^*} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ si $b \neq 0$.

(ces résultats se déduisent directement des propriétés algébriques des limites de suites).

Exemple : $\lim\limits_{x \to 2} 3x^2 - 2x + 5 = 3\left(\lim\limits_{x\to 2} x\right)^2 - 2\left(\lim\limits_{x \to 2} x\right) + 5$

$$= 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 13$$

Limites "infinies" et comportement en $\pm\infty$:

1) $\lim\limits_{x \to x^*} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) veut dire que pour toute suite (x_n) telle que $x_n \in D(f) \setminus \{x^*\}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty \quad (\text{ou } -\infty)$$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (ou resp. $-\infty$ ou $+\infty$) veut dire que pour toute suite (x_n) telle que $x_n \in D(f)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = +\infty$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell \quad (\text{ou resp. } -\infty \text{ ou } +\infty).$$

3) Définition analogue pour $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Théorème des gendarmes pour les fonctions :

Soit $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, et soit $x^* \in \mathbb{R}$ tel que il existe au moins une suite (x_n) telle que $x_n \in D \setminus \{x^*\}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x^*$.

Supposons que :

(i) $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in D$ tel que $0 < |x - x^*| \leqslant \varepsilon$, on a
$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

(ii) $\lim\limits_{x \to x^*} f(x) = \lim\limits_{x \to x^*} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Alors $\lim\limits_{x \to x^*} g(x) = \ell$.

Remarque : on peut donner un théorème analogue pour $\ell = \pm\infty$ ou pour $x^* = \pm\infty$.
Par exemple : si $x^* = +\infty$, il faut remplacer (i) par
$\exists M > 0$, tel que $\forall x \in D$, $x \geqslant M$ on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.

Preuve du Thm :

Soit (x_n) une suite t.q $x_n \in D \setminus \{x^*\}, \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \to +\infty} x_n = x^*$.

Par définition de $\lim_{n\to+\infty} x_n = x^*$, on a que $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$,

$$0 < |x_n - x^*| \leq \varepsilon.$$

Par (i), $\forall n \geq N$, $\underbrace{f(x_n)}_{\xrightarrow{n\to+\infty} \ell} \leq g(x_n) \leq \underbrace{h(x_n)}_{\xrightarrow{n\to+\infty} \ell}$ par (ii)

Donc par le Thm. des gendarmes pour les suites, $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = \ell$.

Donc $\lim_{x\to x^*} g(x) = \ell$. ∎

Exemple :

1) Etudions $\lim_{x\to+\infty} \overbrace{(\sqrt{x^2+x} - x)}^{f(x)}$ (remarque $[1, +\infty[\subset D(f)$)

Pour $x \geq 1$, $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x}$

$$= \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

Pour $x \geq 1$, $x^2 \leq x^2 + x \leq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x \leq \sqrt{x^2+x} \leq \sqrt{(x+1)^2} = x+1$

Donc $f(x) \leq \dfrac{x}{x+x} = \dfrac{1}{2} = g(x)$

$f(x) \geq \dfrac{x}{x+1+x} = \dfrac{1}{2 + 1/x} = h(x)$

On a $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \dfrac{1}{2 + \lim_{x\to+\infty} 1/x} = \dfrac{1}{2}$

Donc par le thm. des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1/2$.

(2) Autres limites à connaître :

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ (démonstration plus tard)
- $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x} = e = \exp(1)$

(eq. $\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$)

Quelques croissances comparées en $+\infty$:

On a $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \alpha < \beta$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tels que $1 < a < b$:

$$\boxed{1 \ll \operatorname{Log}(x) \ll x^{\alpha} \ll x^{\beta} \ll a^x \ll b^x}$$

où "$f(x) \ll g(x)$" signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

se lit "f est asymptotiquement négligeable devant g en $+\infty$".

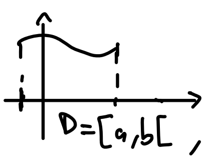
Exemple :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{100}}{e^x} = 0$ car $x^{100} \ll e^x$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log(x^{100})}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{100 \log(x)}{\sqrt{x}} = 0$ car $\log(x) \ll \sqrt{x}$.

(hors programme : Formule de Stirling $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$)

Définition équivalente de la limite "avec ε et δ" :

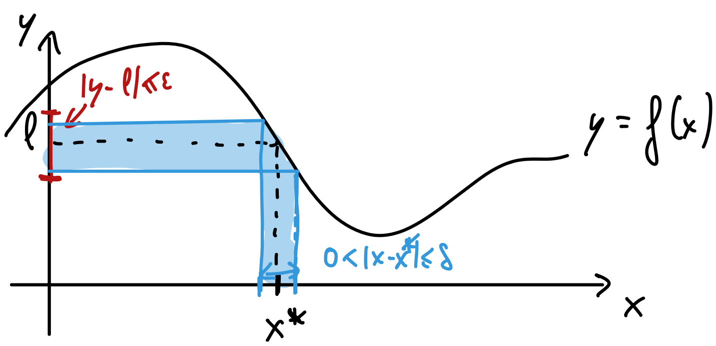
Soit $\begin{cases} f : D \to \mathbb{R}, & D \subset \mathbb{R},\ D \neq \emptyset \text{ et} \\ x^* \in \mathbb{R} \text{ tel que il existe } (x_n) \text{ telle} & \begin{cases} x_n \in D \setminus \{x^*\} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x^* \end{cases} \end{cases}$



Déf : f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x^* ssi
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D$:
$0 < |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

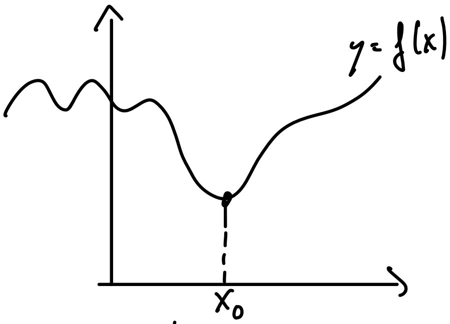
① On choisit $\varepsilon > 0$.

② On trouve $\delta > 0$

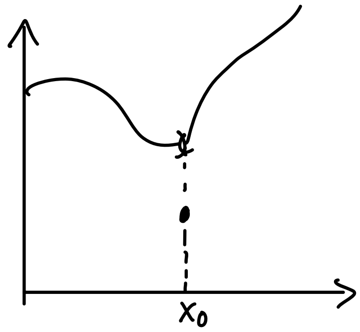


5.6 Fonctions continues

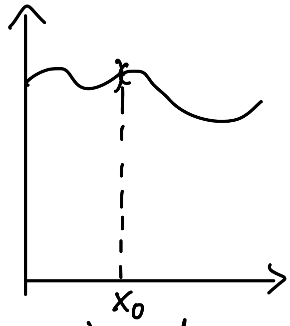
Déf : Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ tel que $\exists \delta > 0$, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset D$
On dit que f est continue en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$.



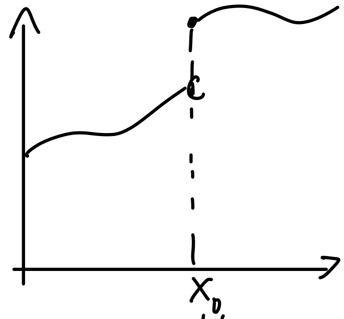
continue en x_0



non continue en x_0



$x_0 \notin D$ donc la question de la continuité ne se pose pas



non continue en x_0

Fin cours 06/11