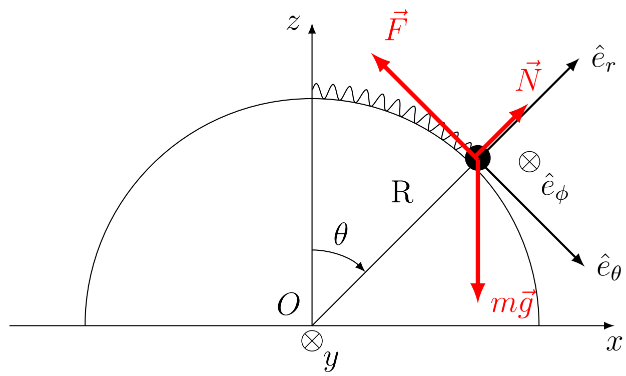
Corrigé du Minitest 1

Bille glissante – (15 points)

a) (2 points au total)

Les forces qui s'appliquent sur la bille sont :
- le poids $\vec{P} = m\vec{g}$, vertical vers le bas,
- la force de rappel de l'élastique $\vec{F}$, dans un plan vertical et tangente à la surface de la sphère,
- la force de liaison de la demi-sphère sur la bille $\vec{N}$, normale à la surface de la sphère.



$\boxed{\text{1 point pour le dessin des trois forces}}_{\text{A}}$

$\boxed{\text{1 point pour la représentation correcte du repère choisi (et utilisé dans la résolution du problème)}}_{\text{B}}$

b) (5 points au total)
Les équations du mouvement sur la sphère sont données par l'application de la deuxième loi de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. En coordonnée sphériques, et avec la contrainte $r = R$ ($\Rightarrow \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$), l'accélération s'écrit $\boxed{\text{1 point}}_{\text{C}}$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (-R\dot{\theta}^2 - R\dot{\phi}^2 \sin^2\theta)\,\hat{e}_r + & (1)\\ &\quad (R\ddot{\theta} - R\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta)\,\hat{e}_\theta + & (2)\\ &\quad (R\ddot{\phi}\sin\theta + 2R\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\,\hat{e}_\phi\,, & (3) \end{aligned}$$

et les forces

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -mg\cos\theta\,\hat{e}_r + mg\sin\theta\,\hat{e}_\theta\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{D}} & (4)\\ \vec{F} &= -kR\theta\,\hat{e}_\theta\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{E}} & (5)\\ \vec{N} &= N_r\,\hat{e}_r\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{F}} & (6) \end{aligned}$$

Les équations du mouvement s'écrivent alors $\boxed{\text{1 point}}_{\text{G}}$

$$\begin{aligned} \text{sur } \hat{e}_r : &\quad -m(R\dot{\theta}^2 + R\dot{\phi}^2\sin^2\theta) = -mg\cos\theta + N_r\,, & (7)\\ \text{sur } \hat{e}_\theta : &\quad m(R\ddot{\theta} - R\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta) = mg\sin\theta - kR\theta\,, & (8)\\ \text{sur } \hat{e}_\phi : &\quad m(R\ddot{\phi}\sin\theta + 2R\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta) = 0\,, & (9) \end{aligned}$$

c) (6 points au total)
Puisque le poids et la force de rappel de l'élastique sont des forces conservatives, et que la force de liaison $\vec{N}$ ne travaille pas, l'énergie mécanique de la bille est conservée. $\boxed{\text{1 point}}_{\text{H}}$ Il sera donc possible de déterminer des conditions liées à la vitesse de la bille en utilisant la conservation de l'énergie

mécanique, sans résoudre les équations du mouvement. En utilisant le point O comme référence pour l'énergie potentielle de pesanteur, l'énergie mécanique est donnée par

$$E_{\text{mec}} = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + \frac{1}{2}mv^2\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{I}} \tag{10}$$

où v est la norme de la vitesse de la bille. Sachant que le mouvement se fait dans un plan vertical, comme indiqué dans la donnée, alors la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ est constamment nulle (on peut prouver cette affirmation en remarquant que moment cinétique initial est nul, et donc que sa composante verticale est nulle, d'où on conclu que la vitesse angulaire $\dot{\phi}$ est constamment nulle). La vitesse de la bille est donc donnée par $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + R\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_\phi = R\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$, et l'équation du mouvement selon $\hat{e}_r$, Eq. (7), devient

$$-mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N_r\,. \tag{11}$$

L'énergie mécanique s'écrit alors

$$\begin{aligned}
E_{\text{mec}} &= mgR\cos\theta + \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 && (12)\\
&= mgR\cos\theta + \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + \frac{1}{2}R(mg\cos\theta - N_r) \text{ [par l'équation (11)]} && (13)\\
&= \frac{3}{2}mgR\cos\theta + \frac{1}{2}kR^2\theta^2 - \frac{1}{2}RN_r\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{J}} && (14)
\end{aligned}$$

A la position initiale, $E_{\text{mec}} = mgR$. Par conservation de l'énergie mécanique, on a

$$mgR = \frac{3}{2}mgR\cos\theta + \frac{1}{2}kR^2\theta^2 - \frac{1}{2}RN_r\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{K}} \tag{15}$$

d'où l'on trouve

$$N_r = kR\theta^2 - mg(2 - 3\cos\theta)\,. \tag{16}$$

La condition de non décollement est $N_r \geq 0$ $\boxed{\text{1 point}}_{\text{L}}$, et on obtient

$$k \geq \frac{mg}{R\theta^2}(2 - 3\cos\theta)\,. \tag{17}$$

Cette équation est plus contraignante pour les valeurs croissantes de θ, et donc pour atteindre l'angle θ_{max} sans décollement on doit avoir

$$k \geq \frac{mg}{R\theta_{\text{max}}^2}(2 - 3\cos\theta_{\text{max}})\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{M}} \tag{18}$$

d) (2 points au total)

Pour atteindre la base de la demi-sphère sans décoller, on doit imposer la condition sur k en $\theta = \pi/2$

$$k \geq \frac{mg}{R\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}(2 - 3\cos\frac{\pi}{2}) = \frac{8mg}{R\pi^2}\,. \tag{19}$$

Il faut encore déterminer la condition sur k pour que la bille puisse atteindre la coordonnée $\theta = \pi/2$. Ce sera possible si l'énergie potentielle au sommet ($\theta = 0$) est plus grande ou égale à l'énergie potentielle à la base de la demi-sphère ($\theta = \pi/2$)

$$mgR \geq mgR\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}kR^2\frac{\pi^2}{2^2} = k\frac{R^2\pi^2}{8} \Rightarrow k \leq \frac{8mg}{R\pi^2}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{N}} \tag{20}$$

Par combinaison des équations (19) et (20), on conclu que la seule valeur de k possible pour que la bille atteigne la base de la demi-sphère sans décoller est

$$k = \frac{8mg}{R\pi^2}\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\text{O}} \tag{21}$$