**Examen Blanc :**
- semaine du 13 au 17 novembre
- durée $1^h$ (QCM, Vrai / Faux)
- Programme : cours jusqu'à aujourd'hui

**Vrai examen :**
- 80 % QCM et Vrai / Faux, 20% questions ouvertes
- Durée $3^h30$
- Pas de calculatrice, aucun document

**Thm (Opération sur les fonctions paires et impaires)** -
Soit $p_1, p_2$ des fonctions paires, $i_1$ et $i_2$ des fonctions impaires définies sur un domaine symétrique $D$, et $f : D(f) \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque.

<u>Alors</u> :

$p_1 + p_2$ est paire

$p_1 \cdot p_2$ est paire

$i_1 + i_2$ est impaire

(*) $i_1 \cdot i_2$ est <u>paire</u>

$p_1 \cdot i_1$ est impaire

(**) $i_1 \circ i_2$ est impaire

$f \circ p_1$ est paire

$p_1 \circ i_1$ est paire

là où la composition est définie.

**Démonstration (partielle) :**

(*) $\forall x \in D$, on a
$$\begin{aligned}(i_1 \cdot i_2)(-x) &= i_1(-x) \cdot i_2(-x) \\ &= (-1)^2 \cdot i_1(x) \cdot i_2(x) \\ &= (i_1 \cdot i_2)(x)\end{aligned}$$

Donc $i_1 \cdot i_2$ est paire

(**) $\forall x \in D$, on a
$$\begin{aligned}(i_1 \circ i_2)(-x) &= i_1(i_2(-x)) \\ &= i_1(-i_2(x)) \quad \leftarrow i_2 \text{ impair} \\ &= -i_1(i_2(x)) \quad \leftarrow i_1 \text{ impair} \\ &= -(i_1 \circ i_2)(x)\end{aligned}$$

Donc $i_1 \circ i_2$ est impaire. ■

Exemples :

- Fonctions paires : $x^2 = x \cdot x$ , $\cos(x) + x^2$ , $\sin(x^2)$ , $\cos(\sin(x))$
- Fonction impairs : $\sin(x) + x$ , $\sin(x^5)$

## 5.3 Périodicité

**Def** : Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite $T$-périodique ($T \in \mathbb{R}_+^*$) si

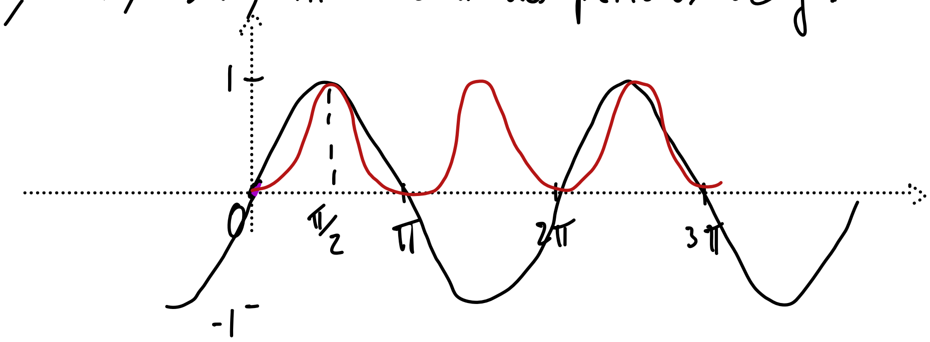
- $\forall x \in D$ , $x + T \in D$
- $\forall x \in D$, $f(x+T) = f(x)$

(On peut déduire (par récurrence) de cette definition $\forall k \in \mathbb{N}$ , $x + kT \in D$ et $f(x+kT) = f(x)$)

- $T$ est une période de $f$
- le plus petit $T > 0$ qui satisfait la définition est appelé la période de $f$

Exemple : $f(x) = \sin(x)^2$ , $D(f) = \mathbb{R}$

$2\pi$, $4\pi$, $3\pi$, ... sont des périodes de $f$.




$\pi$ est la période de $f$

**Prop** : Soit $f$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions $T_f$ (respectivement $T_g$) périodique et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Alors :

- Si $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q}$ (et donc $\frac{T_f}{T_g} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$) alors

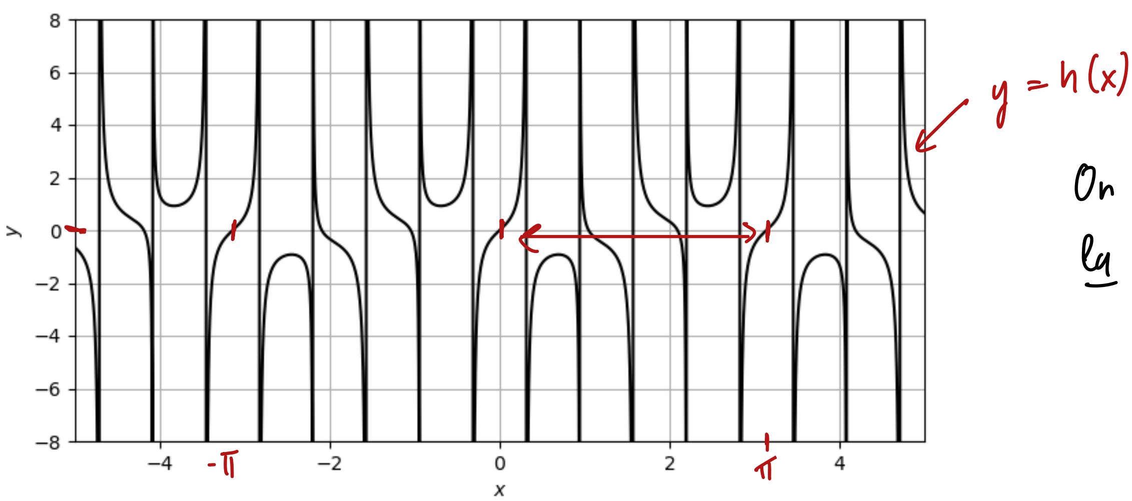
  $f+g$ et $f \cdot g$ sont $T$-périodiques avec $T = q T_f = p T_g$

- $h \circ f$ est $T_f$ périodique.

**Exemple :** $h(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(5x)} = f(x)\cdot g(x)$ avec $\begin{cases} f(x) = \sin(3x) \\ g(x) = \dfrac{1}{\cos(5x)} \end{cases}$

$$\begin{aligned} D(h) &= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,;\, \cos(5x) = 0\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,;\, 5x = k\pi + \tfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{10} + \tfrac{k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

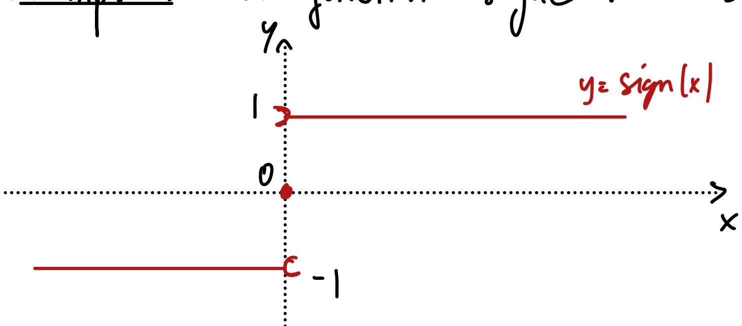
- $f$ est impaire, $g$ est paire donc $h$ est impaire. (à vérifier : $D(f)$ est symétrique).
- La période de $f$ est $T_f = \frac{2\pi}{3}$ et la période de $\underbrace{g \text{ est } T_g}_{\text{composition : } g = h(\cos(5x)) \text{ avec } h(y) = \frac{1}{y}} = \frac{2\pi}{5}$.
- On a $\frac{T_f}{T_g} = \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$ donc $h$ est périodique. Une période est $2\pi$ $(= 3T_f = 5T_g)$.




On observe que la période est $\pi$.

## 5.4 Fonctions définies par morceaux

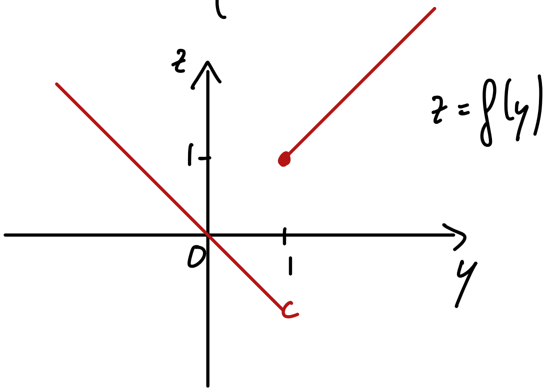
**Exemple :** la fonction signe :

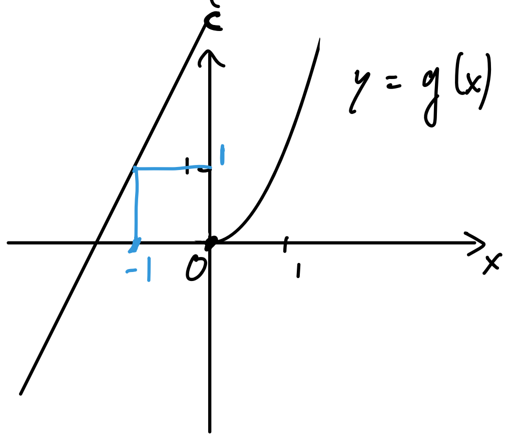



$$\text{sign} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

## Composition (exemple) :

$$f(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \geqslant 1 \\ -y & \text{si } y < 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 2x+3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$




**Donner l'expression de** $h = f \circ g$ $\quad (h(x) = f(g(x)))$.

I. $x \geqslant 0$ et $g(x) \geqslant 1$

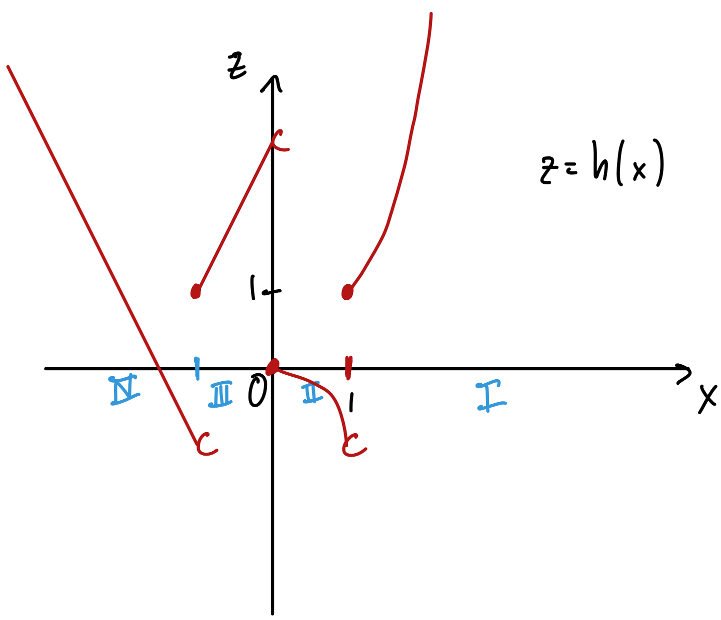
III. $x < 0$ et $g(x) \geqslant 1$

II. $x \geqslant 0$ et $g(x) < 1$

IV. $x < 0$ et $g(x) < 1$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 1 & (\mathrm{I}) \\ -x^2 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 & (\mathrm{II}) \\ 2x+3 & \text{si } -1 \leqslant x < 0 & (\mathrm{III}) \\ -2x-3 & \text{si } x < -1 & (\mathrm{IV}) \end{cases}$$

$(x < 0 \text{ et } 2x+3 \geqslant 1 \iff -1 \leqslant x < 0)$



## 5.5 Limites de fonctions

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$.

Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $x_n \in D, \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = x^* \in \mathbb{R}$

Que peut-on dire de la limite de la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ ?

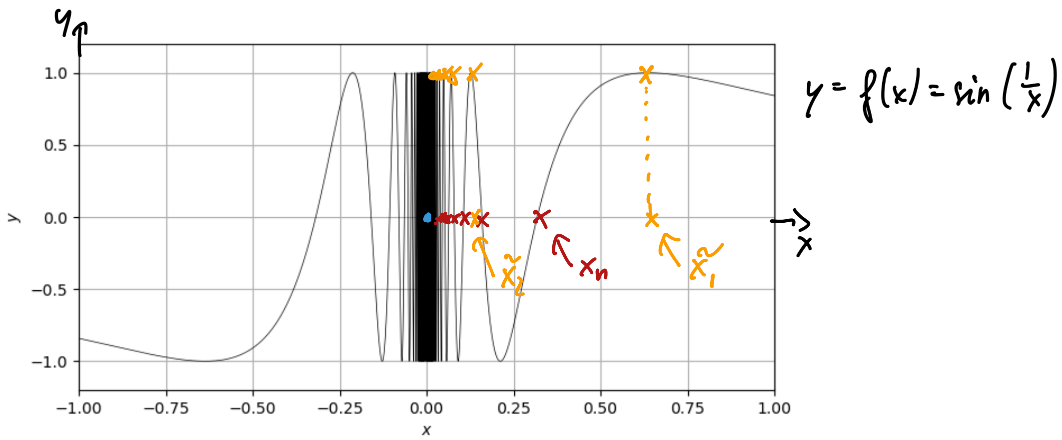
En général : rien !

<u>Exemple</u> : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ , $D(f) = \mathbb{R}^*$

a) $x_n = \frac{1}{n\pi}$ alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \overbrace{\sin(n\pi)}^{=0} = 0$

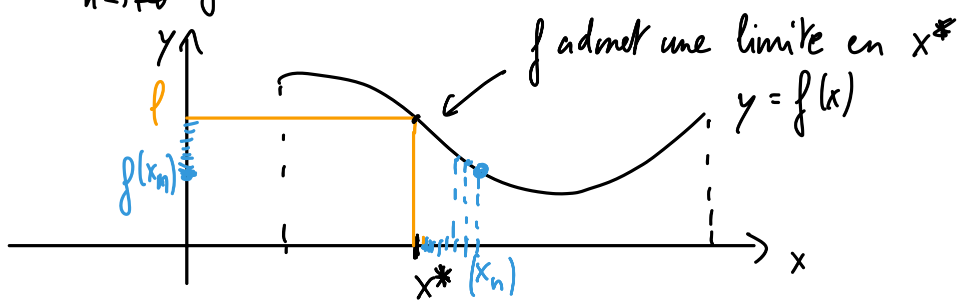
tilde

b) $\tilde{x}_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}$ alors $\lim_{n\to+\infty} \tilde{x}_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f(\tilde{x}_n) = \lim_{n\to+\infty} \overbrace{\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)}^{=1} = 1$




**Def** : On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand $x$ tend vers $x^*$ si pour toute suite $(x_n)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x^*$ et telle que $x_n \in D \setminus \{x^*\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$$

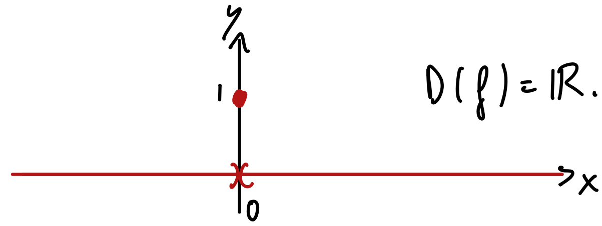


Notations : si $f$ admet pour limite $\ell$ quand $x$ tend vers $x^*$, on écrit :

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = \ell \qquad \left(\text{aussi noté } f(x) \xrightarrow[x \to x^*]{} \ell\right)$$

Exemples :

(1) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$




$D(f) = \mathbb{R}$.

Soit $(x_n)$ une suite telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$ donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ $(\neq f(0))$

Rmq : si $x^* \in D(f)$, il est possible que $\lim_{x \to x^*} f(x) \neq f(x^*)$.

(2) $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ avec $\begin{cases} p(x) = x^2 + 2x + 1 \\ q(x) = x + 1 \end{cases}$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\forall x \in D(f)$, on a $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x+1} = \dfrac{(x+1)^2}{x+1} = x + 1$

Soit $x^* = -1$

Pour toute suite $(x_n)$ telle que : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \neq -1 \\ \lim_{n \to +\infty} x_n = -1 \end{cases}$

On a $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_n + 1 = 0$

Donc $\lim_{x \to -1} f(x) = 0$

(3) On a vu : $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en $0$.

fin cours 2/11