Thm (critères de D'Alembert et de Cauchy pour les séries).

fin cours 26/10

Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ avec $a_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Alors :

- si $\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q \in \mathbb{R}$ (D'Alembert)

ou

- si $\lim_{k\to+\infty} |a_k|^{1/k} = q \in \mathbb{R}$ (de Cauchy)

ou

- si $\limsup_{k\to+\infty} |a_k|^{1/k} = q \in \mathbb{R}$ (critère de Cauchy, version lim-sup).

Alors : $\begin{cases} \text{si } 0 \leqslant q < 1 & \text{alors la série converge absolument.} \\ \text{si } q > 1 \text{ (ou } q = +\infty) & \text{alors la série diverge} \\ \text{si } q = 1 & \text{alors on ne peut pas conclure avec ce critère.} \end{cases}$

<u>Remarque</u> : si plusieurs critères donnent une valeur pour q alors c'est la même valeur.

<u>Exemple</u> :

(i) $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3k-5}{4k+5}\right)^k$

$$\lim_{k\to+\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{3k-5}{4k+5}\right| = \frac{3}{4} = q$$

On a $0 \leqslant q = \frac{3}{4} < 1$ donc par le critère de Cauchy, la série converge absolument.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + (-1)^k \frac{1}{4}\right)^k$

$$\limsup_{k\to+\infty} |a_k|^{1/k} = \limsup_{k\to+\infty} \left|\frac{1}{2} + (-1)^k\frac{1}{4}\right| = \frac{3}{4} = q$$

On a $0 \leqslant q = \frac{3}{4} < 1$ donc par le critère de Cauchy "limsup", la série converge absolument.

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{((3+k)^{1/2} - (2+k)^{1/2})^k}{k^{-k/2}}$

On a $|a_k|^{1/k} = \dfrac{(3+k)^{1/2} - (2+k)^{1/2}}{k^{-1/2}} = \dfrac{\sqrt{3+k} - \sqrt{2+k}}{k^{-1/2}} \times \dfrac{\sqrt{3+k} + \sqrt{2+k}}{\sqrt{3+k} + \sqrt{2+k}}$

technique de la quantité conjuguée

$$= \frac{\big((3+k) - (2+k)\big)\sqrt{k}}{\sqrt{3+k} + \sqrt{2+k}} = \frac{\sqrt{k} \cdot 1}{\sqrt{k}\cdot\left(\sqrt{1+3/k} + \sqrt{1+2/k}\right)}$$

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+3/k} + \sqrt{1+2/k}} = \frac{1}{2} = q$$

On a $0 \leq q = \frac{1}{2} < 1$ donc par le critère de Cauchy la série converge absolument.

4.3 Séries avec un paramètre (exemples)

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{b^k}$ où $b \in \mathbb{R}^*$ un paramètre

$\to$ La convergence dépend du paramètre b.

Etudions le critère de D'Alembert :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2}{|b|^{k+1}} \cdot \frac{|b|^k}{k^2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{|b|} \cdot \frac{(k+1)^2}{k^2} = \frac{1}{|b|} = q$$

- Si $|b| > 1$ alors $q < 1$ donc la série converge absolument.
- Si $|b| < 1$ alors $q > 1$ donc la série diverge
- Si $|b| = 1$ alors on ne peut pas conclure avec ce critère.
  - $\to$ Si $b = 1$: la série est $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^2$
  - $\to$ Si $b = -1$: la série est $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k k^2$ (Rappel : $\frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k$)

  Ces séries divergent car le terme général ne converge pas vers 0.

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k$, où $x \in \mathbb{R}$ un paramètre ($0! = 1$ et $x^0 = 1$ par convention)

Critère de D'Alembert :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|x|^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 = q$$

Donc la série converge absolument.

En fait $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$ (voir plus tard)

En particulier : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \exp(1) = e \quad (\simeq 2{,}71\ldots)$

$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

admis.

Chapitre 5: fonctions réelles d'une variable réelle

On s'intéresse aux fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}$ et $D \neq \emptyset$

<u>Convention</u>: si le domaine D n'est pas précisé, alors par convention D est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel la formule définissant f est bien définie.

<u>Exemple</u>: $f(x) = \frac{2}{1-x^2} \quad \rightsquigarrow \quad D = D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

<u>Fonctions polynômes</u>: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ pour $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ donnés
(convention $x^0 = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

$D(f) = \mathbb{R}$

<u>Fonctions rationnelles</u>: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où p et q sont des polynômes.

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,;\, q(x) \neq 0\}$

$= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} ; q(x) = 0\}$

"privé de".

5.1 Définitions

exemple : $f(x) = \max(0, x)$

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ (avec $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$) est :

- croissante si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$
- strictement croissante si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- décroissante si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$
- strictement décroissante si $\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- (strictement) monotone si elle est
  - soit (strictement) croissante
  - soit (strictement) décroissante.

<u>Critère d'injectivité :</u> Une fonction strictement monotone est injective.

(<u>Preuve</u> : en effet, si $x_1 < x_2$ alors $\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ \text{ou } f(x_1) > f(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

5.2 Fonctions paires ou impaires

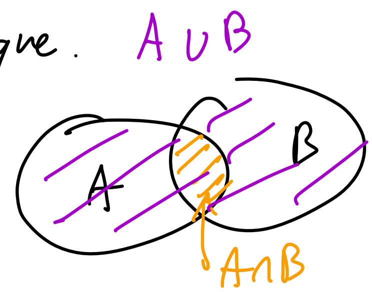
<u>Def</u> : Un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ est symétrique (par rapport à zéro) si $\forall x \in X$ on a $-x \in X$.

<u>Exemples</u> :
- $[-1, 2]$ ou $[-2, 1]$ ne sont pas symétriques.
- $[-3, 3]$ ou $[-5, -2[\cup]2, 5]$ sont symétrique.

<u>Rappel</u> : $\begin{cases} A \cup B = \{x \text{ tels que } x \in A \text{ \underline{ou} } x \in B\} \\ A \cap B = \{x \text{ tels que } x \in A \text{ \underline{et} } x \in B\} \end{cases}$

union

inter



<u>Def</u> : Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est <u>paire</u> si D est symétrique et $\forall x \in D$, $f(-x) = f(x)$.

<u>Exemples</u> : $f(x) = x^2$, $|x|$, $\cos(x)$, a $(a \in \mathbb{R})$, $\sin(x)^2$

Def : Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est impaire si D est symétrique et $\forall x \in D$, $f(-x) = -f(x)$

Exemples : $f(x) = x^3, \frac{1}{x}, \alpha x$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $\sin(x)$,

Remarque : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec D symétrique. Alors on peut écrire $f = f_p + f_i$ avec f_p paire et f_i impaire. Explicitement :

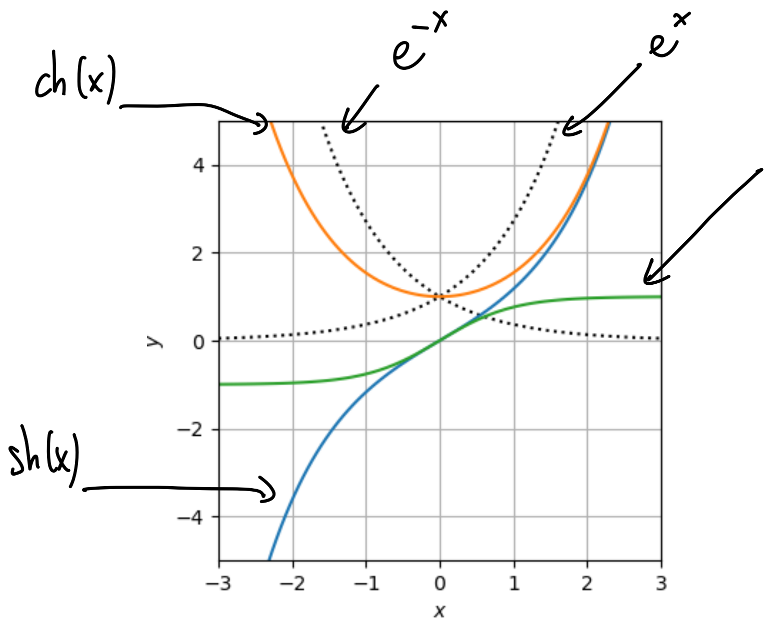
$$\begin{cases} f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) & \text{(partie paire de } f\text{)} \\ f_i(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) & \text{(partie impaire de } f\text{)} \end{cases}$$

Exemple : fonction $sh(x)$ (sinus hyperbolique) et $ch(x)$ (cosinus hyperbolique).

$$f(x) = e^x = ch(x) + sh(x)$$

avec
$$\begin{cases} ch(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \text{(partie paire de } e^x\text{)} \\ sh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \text{(partie impaire de } e^x\text{)} \end{cases}$$

Remarque : $ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1$ (le vérifier)



$$th(x) := \frac{sh(x)}{ch(x)}$$

$$coth(x) := \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{1}{th(x)}$$

(étude des fonctions réciproques en exercices).

fin cours 30/10