

Corrigé Série 08 : Lois de Kepler, moment cinétique, et changements de référentiels

Questions conceptuelles

a) L'accélération de Coriolis s'exprime à partir de l'équation suivante :

$$\vec{a}_{\text{Coriolis}} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} \quad (1)$$

où $\vec{\Omega}$ est la vitesse de rotation de la Terre et \vec{V} la vitesse de l'eau dans le lavabo. On obtient l'expression suivante pour la norme de l'accélération de Coriolis :

$$a_{\text{Coriolis}} = 2\Omega V \sin \theta \quad (2)$$

avec $\Omega = \frac{2\pi}{86400\text{s}}$ la norme la vitesse de rotation de la Terre, $V = 1\text{ m/s}$ la norme la vitesse de l'eau dans le lavabo et θ l'angle entre les vecteurs $\vec{\Omega}$ et \vec{V} . On peut donc écrire

$$a_{\text{Coriolis}} \leq 2\Omega V. \quad (3)$$

Application numérique : $a_{\text{Coriolis}} \leq 2 \times \frac{2\pi}{86400\text{ s}} \times \frac{1\text{ m}}{\text{s}} = 1.5 \times 10^{-4} \text{ ms}^{-2}$.

L'accélération de Coriolis est environ 10^5 fois plus petite que g . La moindre dissymétrie de la surface du réservoir va beaucoup plus influencer l'écoulement que la force de Coriolis elle-même.

b) Dans les deux cas (sol ou matelas), l'œuf subit la même variation de quantité de mouvement Δp durant le choc (en fait $\Delta p = m\sqrt{2gh}$ où m est la masse de l'œuf et h la hauteur de chute). Cette variation de quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force $F(t)$ appliquée par le sol ou le matelas durant un temps Δt . Par la deuxième loi de Newton, l'impulsion est égale à

$$\Delta p = \int_0^{\Delta t} F(t) dt,$$

où on a mis $t = 0$ à l'instant où la force commence à agir.

En supposant que la force F est constante durant le choc, c'est-à-dire $F(t) = F_0$, on a $\Delta p = F_0 \Delta t$ et la force est inversement proportionnelle à la durée du choc ($F_0 = \frac{\Delta p}{\Delta t}$). Comme la durée du choc sur le matelas est beaucoup plus longue que sur le sol, la force moyenne y est plus faible, et donc l'œuf se cassera moins facilement sur le matelas.

1 Voyage vers Mars

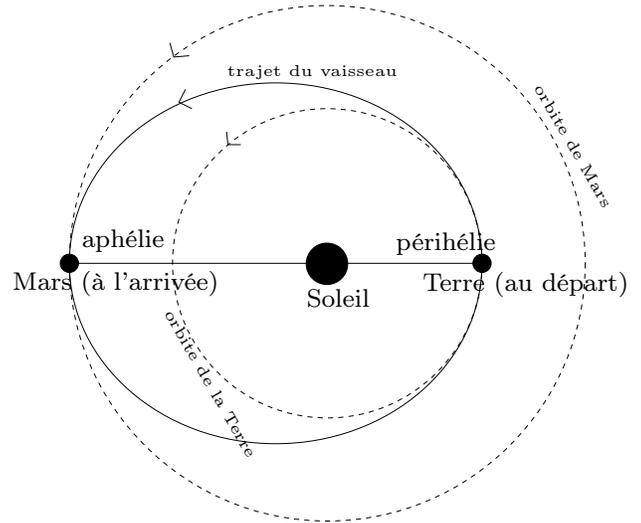
- a) La période de révolution de Mars se calcule en utilisant la troisième loi de Kepler

$$\frac{(\text{période})^2}{(\text{grand axe})^3} = \text{constante.}$$

Soit T_T et T_M les périodes de révolution de la Terre et de Mars respectivement, on a

$$\frac{T_T^2}{(2R_T)^3} = \frac{T_M^2}{(2R_M)^3}$$

$$\Rightarrow T_M = T_T \left(\frac{R_M}{R_T} \right)^{\frac{3}{2}} \simeq 1.874 \text{ années.}$$



On a utilisé le fait que les orbites sont circulaires et donc le grand axe de l'ellipse est égal au diamètre du cercle.

- b) La vitesse de la Terre sur son orbite est donnée par

$$v_T = \Omega_T R_T = \frac{2\pi}{T_T} R_T = 2\pi \frac{1 \text{ u.a.}}{1 \text{ année}} = \frac{2\pi \times 149.6 \times 10^9}{365 \times 24 \times 3600} \simeq 29.8 \times 10^3 \text{ m/s} = 107300 \text{ km/h.}$$

Similairement, pour Mars

$$v_M = \Omega_M R_M = \frac{2\pi}{T_M} R_M \simeq 24.2 \times 10^3 \text{ m/s} = 87120 \text{ km/h.}$$

- c) On calcule la durée du voyage en utilisant à nouveau la troisième loi de Kepler

$$\frac{(T_T)^2}{(2R_T)^3} = \frac{(T_{\text{vaisseau}})^2}{(A)^3},$$

où $A = R_T + R_M$ est le grand axe de l'ellipse. La période du vaisseau est donc donnée par

$$T_{\text{vaisseau}} = T_T \left(\frac{R_T + R_M}{2R_T} \right)^{\frac{3}{2}} \simeq 1.414 \text{ années.}$$

Pour atteindre Mars, on parcourra la moitié de cette orbite. La durée du voyage T_{voyage} sera donc égale à 0.707 années, c'est-à-dire 258 jours.

- d) Pour déterminer les vitesses au départ $v_{\text{dép}}$ et à l'arrivée v_{arr} , nous avons besoin de deux équations. La première est la conservation du moment cinétique du vaisseau par rapport au Soleil entre le point de départ et le point d'arrivée (en effet, par hypothèse le vaisseau ne subit que la force d'attraction du Soleil, qui est centrale). Ceci donne :

$$R_T m v_{\text{dép}} = R_M m v_{\text{arr}}, \quad (4)$$

où m est la masse du vaisseau. La deuxième équation est la conservation de l'énergie mécanique du vaisseau entre le point de départ et le point d'arrivée :

$$\frac{1}{2}mv_{\text{dép}}^2 - \frac{GMm}{R_T} = \frac{1}{2}mv_{\text{arr}}^2 - \frac{GMm}{R_M},$$

que l'on récrit

$$\frac{1}{2}(v_{\text{dép}}^2 - v_{\text{arr}}^2) = GM \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_M} \right), \quad (5)$$

où M est la masse du Soleil.

— Vitesse de départ : En combinant les équations (4) et (5), on trouve

$$\frac{1}{2}v_{\text{dép}}^2 \left(1 - \frac{R_T^2}{R_M^2} \right) = GM \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_M} \right),$$

qui se récrit, en utilisant $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

$$\frac{1}{2}v_{\text{dép}}^2 R_T^2 \left(\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_M} \right) = GM. \quad (6)$$

On remarque que cette équation est aussi valable pour la Terre, sur son orbite circulaire :

$$\frac{1}{2}v_T^2 R_T^2 \frac{2}{R_T} = v_T^2 R_T = GM. \quad (7)$$

En combinant (6) et (7) on trouve

$$v_{\text{dép}} = v_T \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R_T}{R_M}}}. \quad (8)$$

Remarque : On peut également trouver l'équation (7) après projection de la deuxième loi de Newton appliquée au système "Terre" soumis à la force gravitationnelle exercée par le Soleil :

$$M_T \frac{v_T^2}{R_T} = \frac{GM_T M}{R_T^2},$$

où M_T est la masse de la Terre.

— Vitesse d'arrivée : On fait le même raisonnement que pour la vitesse de départ. On combine les équations (4) et (5) pour exprimer la vitesse d'arrivée :

$$\frac{1}{2}v_{\text{arr}}^2 R_M^2 \left(\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_M} \right) = GM. \quad (9)$$

L'équation (9) est valable pour Mars sur son orbite circulaire, on trouve donc

$$\frac{1}{2}v_M^2 R_M^2 \frac{2}{R_M} = v_M^2 R_M = GM. \quad (10)$$

On combine (9) et (10) pour obtenir :

$$v_{\text{arr}} = v_M \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{R_M}{R_T}}}. \quad (11)$$

- La vitesse à donner au vaisseau au départ *par rapport à la Terre* est la différence entre la vitesse orbitale v_{dep} et la vitesse de la Terre v_T :

$$\Delta v_{dép} = v_{dép} - v_T = v_T \left(\sqrt{1 + \frac{R_T}{R_M}} - 1 \right).$$

De même, à son arrivée sur Mars, il faudra modifier la vitesse du vaisseau de

$$\Delta v_{arr} = v_M - v_{arr} = v_M \left(1 - \sqrt{1 + \frac{R_M}{R_T}} \right).$$

Numériquement, la vitesse qu'il faut donner au vaisseau au départ vaut

$$\Delta v_{dép} = v_{dép} - v_T \simeq +2.928 \text{ km/s.}$$

Et à l'arrivée sur Mars, il faudra modifier sa vitesse de

$$\Delta v_{arr} = v_M - v_{arr} \simeq +2.636 \text{ km/s.}$$

On remarque que dans les deux cas, le vaisseau doit être accéléré!

2 Encore l'araignée

Les forces qui s'appliquent sur l'araignée sont

- son poids $m\vec{g}$, dirigé vers le bas,
- la tension dans le fil \vec{T} , dirigée vers le point d'attache du fil O .

Par rapport au point O , le moment de \vec{T} est nul car \vec{T} est colinéaire au vecteur \vec{OA} . Le moment de $m\vec{g}$ par rapport au point O vaut

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge m\vec{g}.$$

Dans un repère associé aux coordonnées cylindriques (voir dessin), le moment s'écrit

$$\vec{M}_O = l\hat{e}_\rho \wedge mg(\cos\phi \hat{e}_\rho - \sin\phi \hat{e}_\phi) = -mgl \sin\phi \hat{e}_z. \quad (12)$$

Le moment cinétique de l'araignée par rapport au point O s'écrit :

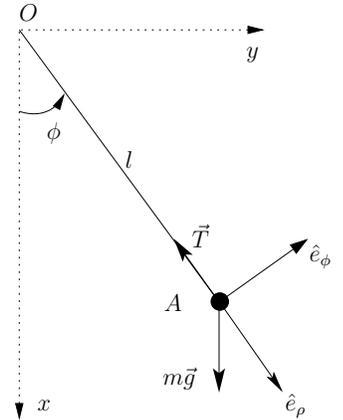
$$\vec{L}_O = \vec{OA} \wedge m\vec{v} = l\hat{e}_\rho \wedge ml\dot{\phi} \hat{e}_\phi = ml^2\dot{\phi} \hat{e}_z, \quad (13)$$

où l'on a utilisé l'expression pour la vitesse $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z$, et le fait que $\rho = l = \text{constante}$ et $\dot{z} = 0$. Le théorème du moment cinétique s'exprime comme suit :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O,$$

dans lequel on introduit les équations (12) et (13) :

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\phi}) = ml^2\ddot{\phi} = -mgl \sin\phi,$$



qui se récrit :

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin \phi, \quad (14)$$

qui est bien l'équation du mouvement d'un pendule.

3 Le rameur

Le problème est à une seule dimension. On considère le référentiel de la terre (absolu) lié à un repère Ox , où O est un point de la rive du fleuve et l'axe x dirigé dans le sens du courant, ainsi que le référentiel du fleuve (relatif) lié à un repère Ay , où A est un point du fleuve et l'axe y est parallèle à x .

La vitesse absolue du fleuve par rapport à Ox est v_f , et la norme de la vitesse relative du rameur par rapport au fleuve est v_r . La bouteille, une fois détachée du bateau, a une vitesse nulle relativement au fleuve.

De manière générale, la loi de transformation des vitesses pour un point P est

$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}, \quad (15)$$

où \vec{v}_P est la vitesse absolue, \vec{v}'_P la vitesse relative, \vec{v}_A la vitesse absolue du point A , et $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire. Dans ce problème à une dimension, $\omega = 0$, $v'_P = \pm v_r$, et $v_A = v_f$, et donc

$$v_P = \pm v_r + v_f. \quad (16)$$

Quand le rameur remonte le courant, sa vitesse relative est $-v_r$, et sa vitesse absolue est $v_P = -v_r + v_f$. La distance parcourue durant un temps t_1 est donc $x_{1,\text{ram.}} = (-v_r + v_f)t_1$. Remarque : $x_{1,\text{ram.}}$ est négatif si v_P est négatif.

Quand le rameur suit le courant, sa vitesse relative est $+v_r$, et sa vitesse absolue est $v_P = +v_r + v_f$. La distance parcourue durant un temps t_2 est donc $x_{2,\text{ram.}} = (v_r + v_f)t_2$.

La position absolue $x_{\text{ram.}}$ du rameur après un temps $t_1 + t_2$ est donc

$$x_{\text{ram.}}(t_1 + t_2) = x_{1,\text{ram.}} + x_{2,\text{ram.}} = (-v_r + v_f)t_1 + (v_r + v_f)t_2 = v_r(t_2 - t_1) + v_f(t_1 + t_2). \quad (17)$$

La bouteille a une vitesse relative nulle, et donc sa vitesse absolue est égale à la vitesse v_f du fleuve. Après un temps $t_1 + t_2$, sa position est donc

$$x_{\text{bout.}}(t_1 + t_2) = v_f(t_1 + t_2). \quad (18)$$

Puisque après le temps $t_1 + t_2$ le rameur et la bouteille ont la même coordonnée absolue ($x_{\text{ram.}} = x_{\text{bout.}} = x$), on peut égaliser les équations (17) et (18). On en déduit que $t_1 = t_2 \equiv t$. En substituant ce résultat dans l'équation (18), on trouve

$$x = v_f 2t \Rightarrow v_f = \frac{x}{2t}. \quad (19)$$

Numériquement, on obtient

$$v_f = \frac{1 \text{ km}}{2 \text{ heures}} = 0.5 \text{ km/h}.$$

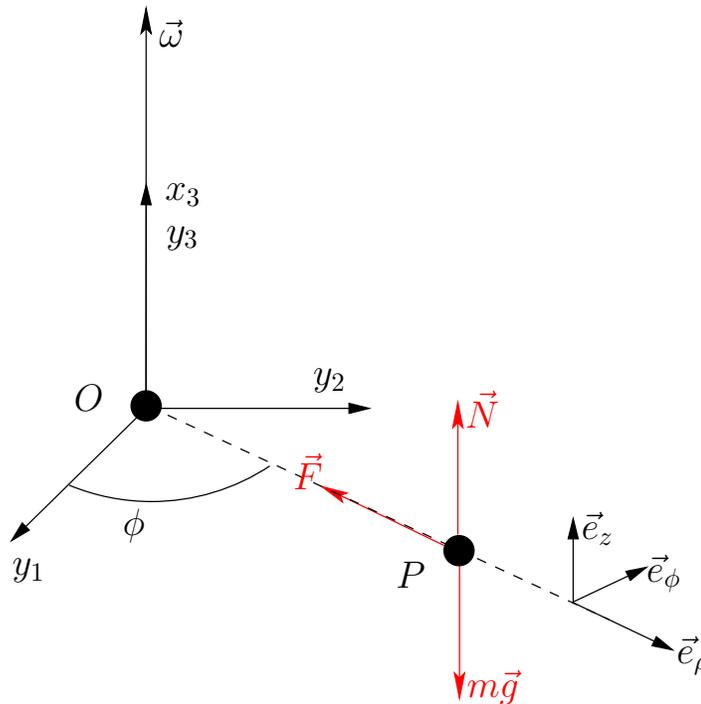
Solution alternative :

Plaçons-nous dans un référentiel lié à la bouteille (ou au fleuve). Dans ce cas, tout se passe comme si l'on se trouvait sur un lac (sans courant). La vitesse du rameur dans ce référentiel est v_r et ne dépend pas de la direction dans laquelle il se déplace (rappelons-nous que tout se passe comme si c'était un lac!). Le rameur s'éloigne donc de la bouteille pendant une heure. Il constate alors la perte et revient en arrière. Il

doit donc à nouveau ramer pendant une heure pour rattraper la bouteille, qui n'a pas bougé dans notre référentiel !

Donc deux heures se seront écoulées entre le moment où la bouteille se détache et le moment où le rameur la récupère. Si dans un référentiel lié à la rive (ou au pont) la bouteille a parcouru 1 km, c'est donc que sa vitesse (égale à celle du fleuve) est de 0.5 km/h.

4 Coureur sur carrousel



On définit, dans la référentiel absolu lié à la Terre, un repère fixe $Ox_1x_2x_3$, où O est le centre du carrousel et où l'axe x_3 est vertical vers le haut.

Calcul direct Le coureur court avec une vitesse \vec{v} par rapport au manège, et ce dernier tourne avec une vitesse angulaire ω . On utilise un système de coordonnées cylindriques, telle que le coureur ait une vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_\phi$ (le signe de v est quelconque). La vitesse totale du coureur dans le référentiel absolu est donc $\vec{v}_T = \vec{v} + R\omega\vec{e}_\phi$. Sa trajectoire est circulaire, donc on sait que son accélération est radiale, et égale à

$$\vec{a} = -\frac{v_T^2}{R}\vec{e}_\rho = -\frac{(v + R\omega)^2}{R}\vec{e}_\rho.$$

Faisons le bilan des forces : le coureur est soumis à la pesanteur \vec{P} , à la réaction du manège \vec{R} et aux forces de frottement solides \vec{F} . $\vec{P} = P\vec{e}_z$ et $\vec{R} = R\vec{e}_z$ sont orientés verticalement (et se compensent car le coureur ne change pas de hauteur). La force de frottement agit dans le plan $(0x_1y_1)$ et est donc égale à $\vec{F} = F_r\vec{e}_\rho + F_\phi\vec{e}_\phi$. On obtient par conséquent les équations du mouvement

$$\begin{cases} ma_r = F_r \\ ma_\phi = F_\phi \\ ma_z = P + R \end{cases}$$

Comme $a_\phi = a_z = 0$, on en déduit

$$F_\phi = 0 \text{ and } F_r = -m \frac{(v + R\omega)^2}{R}.$$

Changement de référentiel Le référentiel relatif du carrousel tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \hat{x}_3$ relativement au référentiel de la Terre. On définit un repère $Oy_1y_2y_3$ fixe dans le référentiel du carrousel, avec l'axe y_3 parallèle à x_3 . Dans ce référentiel, on choisit les coordonnées cylindriques pour déterminer la position du coureur.

Dans le référentiel tournant, la position du coureur est $\vec{OP} = R\vec{e}_\rho$, la vitesse relative du coureur est $\vec{v}_{\text{rel}} = v\hat{e}_\phi$, et l'accélération relative est $\vec{a}_{\text{rel}} = \frac{d\vec{v}_{\text{rel}}}{dt} = v\dot{\hat{e}}_\phi = v(\Omega\hat{e}_z \wedge \hat{e}_\phi)$, où $\Omega\hat{e}_z$ est la vitesse angulaire du coureur dans le référentiel tournant. Comme $v = R\Omega$, on a

$$\vec{a}_{\text{rel}} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_\rho. \quad (20)$$

L'accélération centripète \vec{a}_{cen} et l'accélération de Coriolis \vec{a}_{Cor} sont

$$\vec{a}_{\text{cen}} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) = \omega\hat{e}_z \wedge R\omega\hat{e}_\phi = -R\omega^2\vec{e}_\rho, \quad (21)$$

et

$$\vec{a}_{\text{Cor}} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2\omega\hat{e}_z \wedge v\hat{e}_\phi = -2\omega v\vec{e}_\rho. \quad (22)$$

L'accélération absolue du coureur dans le référentiel fixe est donc

$$\vec{a}_{\text{abs}} = \vec{a}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{cen}} + \vec{a}_{\text{Cor}} = -\left(\frac{v^2}{R} + R\omega^2 + 2\omega v\right)\vec{e}_\rho = -\frac{(v + R\omega)^2}{R}\vec{e}_\rho. \quad (23)$$

Les forces qui s'exercent sur le coureur sont :

- le poids $\vec{P} = -mg\hat{e}_z$ du coureur, perpendiculaire au plan du carrousel.
- la force de soutien $\vec{R} = R\hat{e}_z$ normale au carrousel.
- la force \vec{F} parallèle au sol, due au frottement statique des pieds du coureur sur le carrousel.

On applique la deuxième loi de Newton

$$\Sigma F^{\text{ext.}} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}_{\text{abs}} \quad (24)$$

et on trouve que la force \vec{F} est dirigée selon \vec{e}_ρ :

$$\vec{F} = m\vec{a}_{\text{abs}} = -m \frac{(v + R\omega)^2}{R}\vec{e}_\rho. \quad (25)$$

Exercices facultatifs : compléments de cours

a) Nous allons étudier les différentes coniques qui paramètrent les mouvements orbitaux. On rappelle que le mouvement d'une masse m orbitant autour d'une masse M en O vérifie

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)}$$

On posera $\phi_0 = 0$ dans la suite pour simplifier. En cours, nous avons montré que pour $e < 1$, la trajectoire est une ellipse.

1) Partons de $r = \frac{p}{1+\cos\phi}$. On a alors

$$r(1 + \cos\phi) = p \Leftrightarrow r + x = p$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} r^2 &= (p - x)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = p^2 - 2px + x^2 \\ y^2 &= p^2 - 2px \\ x &= \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}. \end{aligned}$$

On retrouve bien l'équation d'une parabole. On note en particulier qu'il ne s'agit pas d'une trajectoire fermée. Le mouvement n'est pas périodique, mais celui d'une masse traversant le système sans orbite régulière.

Si on ne se rappelle pas de l'astuce du cours, on peut faire un calcul explicite.

$$x = \frac{p \cos\phi}{1 + \cos\phi}, \quad y = \frac{p \sin\phi}{1 + \cos\phi}.$$

Pour continuer, on utilise les formules de l'angle moitié, soit $1 + \cos\phi = 2 \cos^2 \frac{\phi}{2}$, $\sin\phi = 2 \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\phi}{2}$ and $\cos\phi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\phi}{2}$. On obtient

$$\begin{aligned} y &= p \tan \frac{\phi}{2} \\ x &= p \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\phi}{2}}{2 \cos^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{p}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\phi}{2}} - p \tan^2 \frac{\phi}{2} = \frac{p}{2} - \frac{p}{2} \tan^2 \frac{\phi}{2}. \end{aligned}$$

Soit,

$$x = \frac{p}{2} - \frac{1}{2p} y^2.$$

On obtient bien l'équation d'une parabole.

2) Il s'agit de la même démonstration que pour l'ellipse. Soit $r = \frac{p}{1+e\cos\phi}$. On note $a = \frac{p}{e^2-1}$. On a alors $r(1 + e \cos\phi) = p = a(e^2 - 1)$

$$\begin{aligned} r + ex &= a(e^2 - 1) \\ r^2 &= (a(e^2 - 1) - ex)^2 \\ x^2 + y^2 &= a^2(e^2 - 1)^2 - 2ea(e^2 - 1)x + e^2x^2 \\ -a^2(e^2 - 1)^2 &= -2ea(e^2 - 1)x + (e^2 - 1)x^2 - y^2 \\ a^2(1 - e^2) &= (x - ea)^2 - e^2a^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} \\ a^2 &= (x - a)^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} \end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu avec $A = a$ and $B = a\sqrt{e^2 - 1}$. Le même commentaire s'applique. En sus, pour certaines valeurs de θ , r devient négatif. Cette branche n'est pas physique.

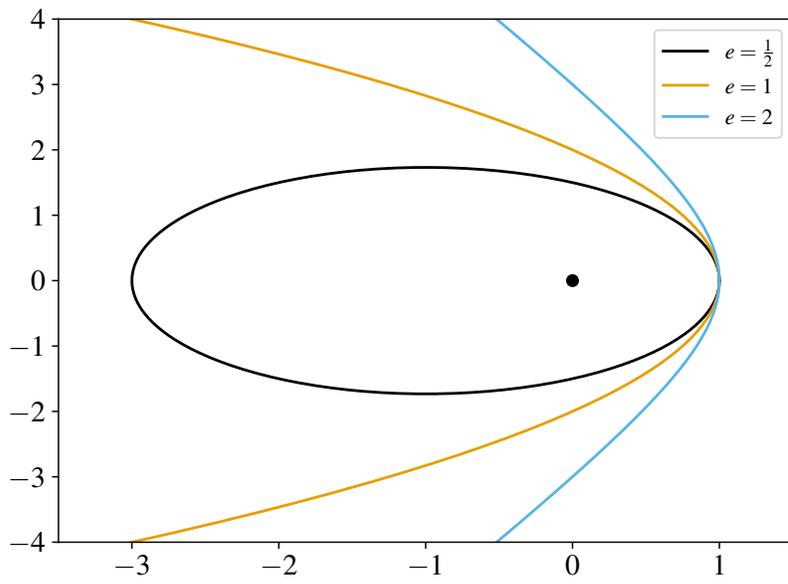


FIGURE 1 – Les trois familles de coniques. Notez que je n’ai pas représenté ici la seconde branche, non-physique, de l’hyperbole.