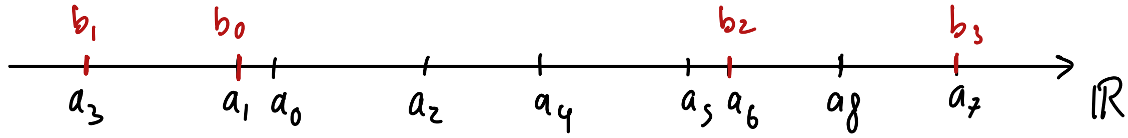
Exemple :



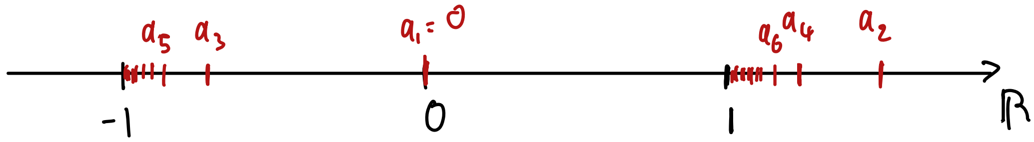
Ici : $\underbrace{n_0 = 1}$, $\underbrace{n_1 = 3}$, $n_2 = 6$, $n_3 = 7$, ...
(car $b_0 = a_1$) (car $b_1 = a_3$)

Thm. (Bolzano-Weierstrass). De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Def (Point d'accumulation) : $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de la suite (a_n) s'il existe une sous-suite $(a_{n_k})_{k \geq 0}$ telle que $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} = a$.

$\rightsquigarrow$ Le thm. de Bolzano-Weierstrass nous dit que toute suite bornée admet (au moins) un point d'accumulation.

Exemple: $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad$ ($a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{-2}{3}$, $a_4 = \frac{5}{4}$, ...



La suite (a_n) est bornée ($\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq a_n \leq 2$) donc elle admet des points d'accumulation.

Les points d'accumulation sont 1 et -1. En effet :

- $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{2k+1} = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(-1 + \frac{1}{2k+1}\right) = -1$ $\quad$ (ici $n_k = 2k+1$)
- $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) = 1$ $\quad$ (ici $n_k = 2k$).

⚠ $(a_{3k})_{k \geq 0}$ est aussi une sous-suite (avec $n_k = 3k$) mais elle ne converge pas.

fin cours 23/10

3.8 Limite inférieure et limite supérieure

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée.

$A_0 = \{a_0, a_1, \dots\}$ $\qquad$ $b_0 := \inf A_0 \leq \sup A_0 =: c_0$

$A_1 = \{a_1, a_2, \dots\}$ $\qquad$ $b_0 \leq b_1 := \inf A_1 \leq c_1 := \sup A_1 \leq c_0$

$\vdots$

$A_n = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ $\qquad b_0 \leqslant \dots \leqslant b_{n-1} \leqslant b_n := \inf A_n \leqslant c_n := \sup A_n \leqslant c_{n-1} \leqslant \dots \leqslant c_0$

(b_n) est croissante et majorée $\Rightarrow$ converge

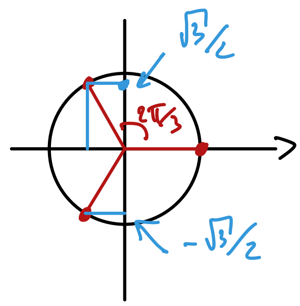
(c_n) est décroissante et minorée $\Rightarrow$ converge

<u>Def</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} \liminf_{n\to+\infty} a_n &:= \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \inf \overbrace{\{a_k \,;\, k \geqslant n\}}^{A_n} \\ \limsup_{n\to+\infty} a_n &:= \lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \sup \{a_k \,;\, k \geqslant n\} \end{aligned}}$$

<u>Exemple</u> : Prenons la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $a_n = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\cdot n\right) + \frac{(-1)^n}{n}$, pour $n \geqslant 1$.

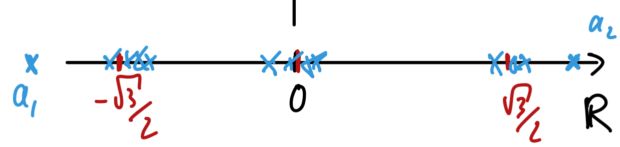
On a $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\cdot n\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 3k \text{ pour } k \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt{3}/2 & \text{si } n = 3k+1 \text{ pour } k \in \mathbb{N} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } n = 3k+2 \text{ ——} \end{cases}$



• Donc $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n} \leqslant a_n \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\qquad \downarrow n\to+\infty \qquad\qquad\qquad \downarrow n\to+\infty$

$\qquad -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}$



Donc $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ (on a aussi $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$)

• Prenons $n_k = 3k+2$ et posons (b_k) la sous-suite définie par $b_k = a_{n_k} = a_{3k+2}$.

On a $b_k = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^{3k+2}}{3k+2}$

donc $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{k\to+\infty} b_k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

• En conclusion, $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\quad$ (Exercice : montrer $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

<u>Remarques</u>: (admis)

- $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ est le plus petit des points d'accumulation de (a_n).
- $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ est le plus grand des points ——

- $\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n = a$ $\underbrace{\text{ssi}}_{\text{si et seulement si}}$ (a_n) converge vers a.

- En particulier si une suite converge vers a, alors a est l'unique point d'accumulation de la suite.

Chapitre 4 : séries (réelles)

Une série est la somme (infinie) des termes d'une suite.

Notations : . Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k := \lim_{n\to+\infty} S_n \quad \text{où} \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

→ (S_n) est la suite des sommes partielles

→ les a_k sont appelés les termes de la série.

Def : une série est dite (simplement) convergente si la suite (S_n) des sommes partielles converge. La limite $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ est appelée la somme de la série.

Def : une série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ converge.

Propriétés :

- Toute série absolument convergente est convergente.
- La somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre de ses termes.

4.1 Exemples

- La série harmonique : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$

Prop : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. (Autrement dit $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$)

Preuve : (i) On a $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} > 0$ donc (S_n) est croissante.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \quad \left(\text{car } \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n},\ \forall k \leq 2n\right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi $S_1 = 1$, $S_2 \geq S_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$, $S_4 \geq S_2 + \frac{1}{2} \geq 1 + 2\cdot\frac{1}{2}$

Par récurrence, on obtient que : $S_{2^k} \geq 1 + k\cdot\frac{1}{2}$

Donc la suite (S_n) n'est pas majorée.

(iii) (S_n) est croissante et pas majorée donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ ∎

Rappel : on a déjà montré $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ existe $\in \mathbb{R}$

Plus généralement : $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \text{ converge ssi } \alpha < -1}$

- Séries géométriques : $S = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ où $q \in \mathbb{R}^*$ donné
  - la série converge absolument pour $|q| < 1$.
  - la série diverge pour $|q| \geq 1$.

Preuve : Pour $q \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

- Donc si $|q| < 1$, comme $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$
- Pour $|q| \geq 1$, on utilise le critère ci-dessous.

4.2. Critères de convergence pour les séries

Thm (critère nécessaire) : $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge $\Rightarrow$ $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

⚠ L'implication réciproque est fausse. Exemple : $a_k = \frac{1}{k}$.

Thm (Critère de Leibniz pour les séries alternées). Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite.

Si :
- (a_k) est alternée, c'est-à-dire soit $(-1)^k a_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, ou soit $(-1)^{k+1} a_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- $(|a_k|)_k$ est décroissante, c'est-à-dire $|a_{k+1}| \leq |a_k|$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

Alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.

Exemple : série harmonique alternée : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge par le critère de Leibniz.

En effet, la suite $(a_k)_{k\geq 1}$, définie par $a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ satisfait :

(1) (a_k) est alternée.

(2) $|a_k| = \frac{1}{k}$ est décroissante.

(3) $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.

En revanche $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ne converge pas absolument (car $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge).

Thm (critère de comparaison).
- Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq |a_k| \leq b_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge absolument.
- Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq b_k \leq a_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ diverge alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge.