Notons $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$.

On a $0 = \lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n - \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = b - a$

Ainsi $a = b$. $\blacksquare$

fin cours 19/10

$\rightarrow$ Regarder les exercices type-examen "questions ouvertes" sur le Moodle.

Remarque : si (a_n) et (b_n) convergent et si

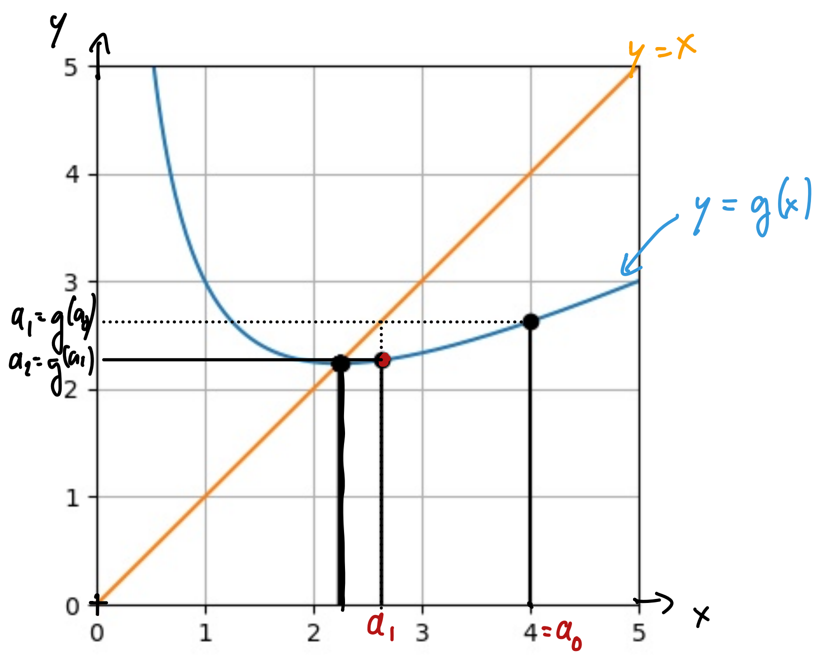
$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad a_n \leq b_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_n < b_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$

"les inégalités larges passent à la limite".

3.6 Suites définies par récurrence

Exemple : $\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_{n+1} = g(a_n), \ \forall n \geq 1 \\ \quad\;\;\; = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) \end{cases}$ où $g : \begin{vmatrix} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right) \end{vmatrix}$



(0) On a $a_0 = 4$. Si $a_n > 0$ alors $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) > 0$

Donc par récurrence $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc la suite est bien définie.

(1) Supposons que (a_n) converge et que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = a \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} a_n + \frac{5}{\lim_{n\to+\infty} a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{5}{a}\right) \end{cases}$$

on utilise $a \neq 0$.

Donc $a = \frac{1}{2}a + \frac{5}{2a} \Leftrightarrow \frac{1}{2}a = \frac{5}{2a} \Leftrightarrow a^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a = +\sqrt{5} \\ \text{ou} \\ a = -\sqrt{5} \end{cases}$

Mais $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donc si (a_n) converge vers une limite non nulle, cette limite doit être $\sqrt{5}$.

(2) Montrons que (a_n) est minorée par $\sqrt{5}$.

- $a_0 = 4 > \sqrt{5}$
- (Si $a_n \geqslant \sqrt{5}$ alors) $a_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) - \sqrt{5}$

$$= \frac{a_n^2 + 5 - 2\sqrt{5}\,a_n}{2a_n} = \frac{\overbrace{(a_n - \sqrt{5})^2}^{\geqslant 0}}{\underbrace{2a_n}_{>0}} \geqslant 0$$

Donc $a_n \geqslant \sqrt{5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(3) Montrons que (a_n) est décroissante :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) - a_n$$

$$= \frac{a_n^2 + 5 - 2a_n^2}{2a_n} = \frac{\overbrace{5 - a_n^2}^{\leqslant 0}}{\underbrace{2a_n}_{>0}} \leqslant 0$$

Donc (a_n) est décroissante.

(4) En conclusion, (a_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{5}$, donc elle converge. Sa limite est $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{5}$.

Plus généralement, pour $C > 0$, $\begin{cases} a_0 > 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{C}{a_n}\right) \end{cases}$ converge vers $\sqrt{C}$!

↳ Algorithme de Héron (cas particulier de la méthode de Newton).

Suites définies par récurrence linéaire

Suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de la forme $\begin{cases} a_0 \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = g(a_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ avec $g(x) = q\cdot x + b$ et $q, b \in \mathbb{R}$.

Cas particuliers : 1) Suites arithmétiques : pour $q = 1$.

$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b, \forall n \in \mathbb{N} \\ a_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ (Par récurrence) $\Leftrightarrow$ $a_n = a_0 + n\cdot b$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2) Suites géométriques : pour $b = 0$.

$\begin{cases} a_{n+1} = \underbrace{q}_{\text{raison}}\cdot a_n, \forall n \in \mathbb{N} \\ a_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ (Par récurrence) $\Leftrightarrow$ $a_n = a_0\cdot q^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Thm : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $\begin{cases} a_0 \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = g(a_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$, $q \neq 1$.

avec $g(x) = q\cdot x + b$. Soit $a = \frac{b}{1-q}$ (l'unique solution de $a = g(a) = q\cdot a + b$)

- Si $|q| < 1$ ou si $a_0 = a$ alors $\lim_{n\to+\infty} a_n \overset{\text{existe}}{=} a$.
- Si $|q| \geq 1$ et si $a_0 \neq a$ alors (a_n) diverge.

Preuve : (0) (a_n) est bien définie car $\text{dom}(g) = \mathbb{R}$

(i) Si (a_n) converge alors

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} q\cdot a_n + b = q\cdot\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) + b = q\cdot a + b$$

Donc $(1-q)\,a = b \Leftrightarrow a = \frac{b}{1-q}$

(ii) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a| &= |q \cdot a_n + b - (q \cdot a + b)| \\ &= |q \cdot (a_n - a)| \\ &= |q| \cdot |a_n - a| \\ &= |q|^{n+1} \cdot |a_0 - a| \end{aligned}$$

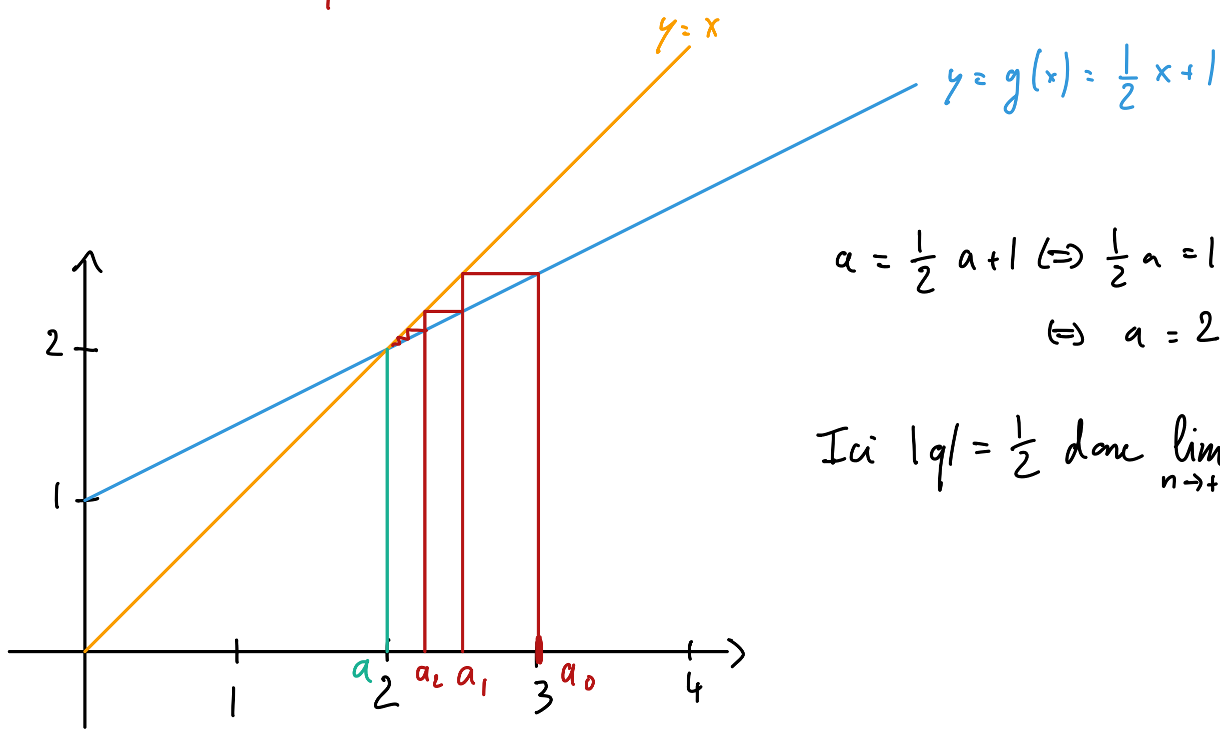
(par récurrence ; en effet $u_n = |a_n - a|$ est géométrique de raison $|q|$)

→ Si $|q| < 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} |a_{n+1} - a| = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} (a_n - a) = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$

→ Si $a_0 = a$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n - a| = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$

→ Si $|q| \geq 1$ et $a_0 \neq a$, la suite diverge. ■

<u>Exemple</u> : $\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{q} a_n + \underbrace{1}_{b}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$



$a = \frac{1}{2} a + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} a = 1$

$\Leftrightarrow a = 2$

Ici $|q| = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{n \to +\infty} a_n = 2$

3.7 Sous-suite et Thm. de Bolzano-Weierstrass

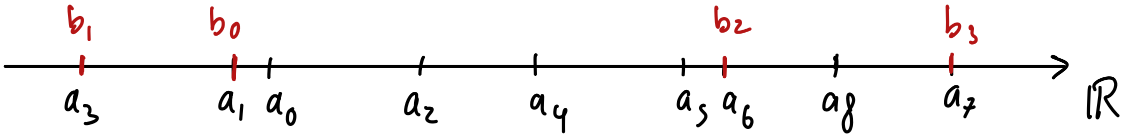
Déf : Soit $(n_k)_{k \geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels, c'est-à-dire : $\forall k \in \mathbb{N}$, $n_k \in \mathbb{N}$ et $n_{k+1} > n_k$

(suite d'indices)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite.

La suite $(b_k)_{k \geq 0}$ définie par $b_k = a_{n_k}$ est appellée une sous-suite de la suite (a_n)

Exemple :



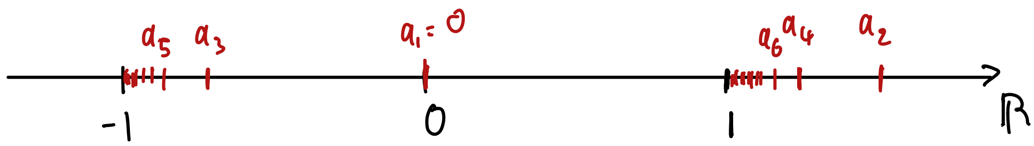
Ici : $\underbrace{n_0 = 1}_{}$, $\underbrace{n_1 = 3}_{}$, $n_2 = 6$, $n_3 = 7$, ...
(car $b_0 = a_1$) (car $b_1 = a_3$)

Thm. (Bolzano - Weierstrass). De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Def (Point d'accumulation) : $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de la suite (a_n) s'il existe une sous-suite $(a_{n_k})_{k \geq 0}$ telle que $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} = a$.

$\leadsto$ Le thm. de Bolzano-Weierstrass nous dit que toute suite bornée admet (au moins) un point d'accumulation.

Exemple : $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\left(a_1 = 0,\ a_2 = \frac{3}{2},\ a_3 = \frac{-2}{3},\ a_4 = \frac{5}{4}, \ldots \right.$



La suite (a_n) est bornée ($\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant a_n \leqslant 2$) donc elle admet des points d'accumulation.

Les points d'accumulation sont 1 et -1. En effet :

- $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{2k+1} = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(-1 + \frac{1}{2k+1} \right) = -1$ (ici $n_k = 2k+1$)
- $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2k} \right) = 1$ (ici $n_k = 2k$).

⚠ $(a_{3k})_{k \geq 0}$ est aussi une sous-suite (avec $n_k = 3k$) mais elle ne converge pas.

fin cours 23/10