

**Exercice 1.**

- a) Cette affirmation est fausse. En effet, si on prend  $f(x) = x^2 + 1$  et  $g(x) = 2$ , le produit  $h(x)$  est égal à  $h(x) = 2x^2 + 2$  qui est de degré 2. Comme le degré de  $f(x)$  est 2 et celui de  $g(x)$  est 0, le degré de  $h(x)$  est bien supérieur à celui de  $g(x)$ , mais n'est pas supérieur à celui de  $f(x)$ .
- b) Cette affirmation est fausse. En effet, en prenant cette fois deux polynômes de degré 0,  $f(x) = 1$  et  $g(x) = 2$ , le produit  $h(x) = 2$  est de degré 0. Ainsi le degré de  $h(x)$  n'est supérieur ni à celui de  $f(x)$ , ni à celui de  $g(x)$ .
- c) Cette affirmation est vraie car lorsque l'on divise un polynôme de degré  $n$  par un polynôme de degré  $m$ , avec  $n \geq m$ , le quotient sera de degré  $n - m$ . Donc si  $n = m$  alors le quotient sera de degré  $n - m$ , c'est à dire 0. Attention, si dans un de ces exercices on choisit le polynôme  $f(x) = 0$ , il faut savoir que son degré est  $-\infty$  par convention. Ainsi, par exemple, si on multiplie les polynômes  $f(x) = 0$  et  $g(x) = x^2 + 1$ , le produit sera  $h(x) = 0$  qui sera de degré  $-\infty$ .

**Exercice 2.**

a)

$$\begin{array}{r|l} 4x^2 - 5x + 1 & 2x - 1 \\ -4x^2 + 2x & 2x - \frac{3}{2} \\ \hline & -3x \\ & 3x - \frac{3}{2} \\ \hline & -\frac{1}{2} \end{array}$$

L'égalité fondamentale de la division est  $4x^2 - 5x + 1 = (2x - 1)\left(2x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}$ .

b)

$$\begin{array}{r|l} x^3 & -x + 12 \\ -x^3 + 4x^2 & x - 4 \\ \hline & 4x^2 \\ & -4x^2 + 16x \\ \hline & 15x \\ & -15x + 60 \\ \hline & 72 \end{array}$$

L'égalité fondamentale de la division est  $x^3 - x + 12 = (x - 4)(x^2 + 4x + 15) + 72$ .

c)

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^3 & -7x + 3 \\ -x^4 - x^3 - 2x^2 & x^2 + x + 2 \\ \hline & -3x^3 - 2x^2 \\ & 3x^3 + 3x^2 + 6x \\ \hline & x^2 - x \\ & -x^2 - x - 2 \\ \hline & -2x + 1 \end{array}$$

L'égalité fondamentale de la division est  $x^4 - 2x^3 - 7x + 3 = (x^2 + x + 2)(x^2 - 3x + 1) - 2x + 1$ .

d)

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 & +x^2 + 1 \\ -6x^4 & -3x^2 \\ \hline & -2x^2 \\ & 2x^2 + 1 \\ \hline & 2 \end{array}$$

L'égalité fondamentale de la division est  $6x^4 + x^2 + 1 = (2x^2 + 1)(3x^2 - 1) + 2$ .

e)

$$\begin{array}{r|l} -2x^3 & -3x + 1 \\ 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 & -\frac{2}{3} \\ \hline \frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{1}{3} & \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x^3 + x^2 - 1 \\ -\frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$$

L'égalité fondamentale de la division est  $-2x^3 - 3x + 1 = (3x^3 + x^2 - 1)\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{1}{3}$ .

**Exercice 3.** Commençons par effectuer la division euclidienne de  $f(x)$  par  $x + 2$ .

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 & -2x^2 + 4x - 3 \\ -3x^4 - 6x^3 & \\ \hline -6x^3 & \\ 6x^3 + 12x^2 & \\ \hline 10x^2 & \\ -10x^2 - 20x & \\ \hline -16x & \\ +16x + 32 & \\ \hline 29 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2 \\ \hline 3x^3 - 6x^2 + 10x - 16 \\ \hline \end{array}$$

L'égalité fondamentale de la division est donc

$$f(x) = (x + 2)(3x^3 - 6x^2 + 10x - 16) + 29.$$

Si on évalue ce  $f(x)$  en  $-2$ , le premier produit tombe et il reste  $f(-2) = 29$ . Faisons maintenant la vérification par substitution :

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3 \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 3 \\ &= 3 \cdot 16 - 2 \cdot 4 - 8 - 3 \\ &= 48 - 8 - 8 - 3 \\ &= 29. \end{aligned}$$

**Exercice 4.**

Dans chaque cas, nous allons effectuer la division euclidienne de  $f(x)$  par le polynôme  $x - a$  ce qui nous donnera  $f(x) = (x - a)q(x) + r(x)$  où  $q(x)$  sera le quotient et  $r(x)$  le reste. Ainsi on pourra facilement calculer  $f(a) = (a - a)q(a) + r(a) = r(a)$ .

a)

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 - 4x^2 + x + 1 & x - 1 \\ -3x^3 + 3x^2 & \\ \hline -x^2 & \\ x^2 - x & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$f(x) = (x - 1)(3x^2 - x) + 1$ , donc  $f(1) = 1$ .

b)

$$\begin{array}{r|l} x^3 & +2x + 3 \\ -x^3 + 3x^2 & \\ \hline 3x^2 & \\ -3x^2 + 9x & \\ \hline 11x & \\ -11x + 33 & \\ \hline 36 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 3 \\ \hline x^2 + 3x + 11 \\ \hline \end{array}$$

$f(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 11) + 36$ , donc  $f(3) = 36$ .

c)

$$\begin{array}{r|l}
 4x^3 + 2x^2 + 3x + 8 & x + 2 \\
 \underline{-4x^3 - 8x^2} & \\
 -6x^2 & \\
 \underline{6x^2 + 12x} & \\
 15x & \\
 \underline{-15x - 30} & \\
 -22 & 
 \end{array}$$

$$f(x) = (x + 2)(4x^2 - 6x + 15) - 22, \text{ donc } f(-2) = -22$$

d)

$$\begin{array}{r|l}
 3x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x + 4 & x + 8 \\
 \underline{-3x^4 - 24x^3} & \\
 -28x^3 & \\
 \underline{28x^3 + 224x^2} & \\
 223x^2 & \\
 \underline{-223x^2 - 1784x} & \\
 -1782x & \\
 \underline{+1782x + 14256} & \\
 14260 & 
 \end{array}$$

$$f(x) = (x + 8)(3x^3 - 28x^2 + 223x - 1782) + 14260, \text{ donc } f(-8) = 14260.$$

e)

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 - 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 9 & x - 9 \\
 \underline{-x^5 + 9x^4} & \\
 3x^4 & \\
 \underline{-3x^4 + 27x^3} & \\
 32x^3 & \\
 \underline{-32x^3 + 288x^2} & \\
 289x^2 & \\
 \underline{-289x^2 + 2601x} & \\
 2604x & \\
 \underline{-2604x + 23436} & \\
 23427 & 
 \end{array}$$

$$f(x) = (x - 9)(x^4 + 3x^3 + 32x^2 + 289x + 2604) + 23427, \text{ donc } f(9) = 23427.$$

### Exercice 5.

Pour que  $a$  soit une racine de  $f(x)$ , il faut que le polynôme  $(x - a)$  soit facteur de  $f(x)$ . En effet, si c'est le cas  $f(x) = (x - a)q(x)$ , où  $q(x)$  est le quotient de la division euclidienne et le reste est nul. Ainsi  $f(a) = (a - a)q(a) = 0$  ce qui signifie que  $a$  est une racine de  $f(x)$ . Pour cet exercice nous allons donc effectuer la division euclidienne de  $f(x)$  par  $(x - a)$  et regarder si le reste est nul ou pas.

a)

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 4x^2 + 9x - 10 & x - 2 \\
 \underline{-x^3 + 2x^2} & \\
 -2x^2 & \\
 \underline{2x^2 - 4x} & \\
 5x & \\
 \underline{-5x + 10} & \\
 0 & 
 \end{array}$$

Le reste est égal à 0, ainsi on peut écrire  $f(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 5)$  et voir que  $f(2) = 0$  et donc que 2 est une racine de  $f(x)$ .

b)

$$\begin{array}{r|l}
 4x^3 & -4x^2 & +7x & +1 & x & +4 \\
 -4x^3 & -16x^2 & & & 4x^2 & -20x & +87 \\
 \hline
 & -20x^2 & & & & & \\
 & 20x^2 & +80x & & & & \\
 \hline
 & & 87x & & & & \\
 & & -87x & -348 & & & \\
 \hline
 & & & -347 & & & 
 \end{array}$$

Dans ce cas,  $f(-4) = -347$  donc  $-4$  n'est pas une racine de  $f(x)$ .

c) Si on fait comme les autres cas, on devrait faire la division de  $f(x)$  par  $(x - \frac{1}{2})$ , cependant on préfère travailler avec des coefficients entiers. On prendra donc comme diviseur  $d(x) = (2x - 1)$ . Le résultat sera le même car  $d(\frac{1}{2}) = 0$  et le polynôme  $(x - \frac{1}{2})$  évalué en  $\frac{1}{2}$  est aussi égal à 0.

$$\begin{array}{r|l}
 8x^4 & -2x^3 & +7x^2 & -2x & -1 & 2x & -1 \\
 -8x^4 & +4x^3 & & & & 4x^3 & +x^2 & +4x & +1 \\
 \hline
 & 2x^3 & & & & & & & \\
 & -2x^3 & +x^2 & & & & & & \\
 \hline
 & & 8x^2 & & & & & & \\
 & & -8x^2 & +4x & & & & & \\
 \hline
 & & & 2x & & & & & \\
 & & & -2x & +1 & & & & \\
 \hline
 & & & & 0 & & & & 
 \end{array}$$

$f(\frac{1}{2}) = 0$ , donc  $\frac{1}{2}$  est une racine de  $f(x)$ .

d)

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 & +9x^2 & -17x & +6 & x & +6 \\
 -2x^3 & -12x^2 & & & 2x^2 & -3x & +1 \\
 \hline
 & -3x^2 & & & & & \\
 & 3x^2 & +18x & & & & \\
 \hline
 & & x & & & & \\
 & & -x & -6 & & & \\
 \hline
 & & & 0 & & & 
 \end{array}$$

$f(-6) = 0$  donc  $-6$  est une racine de  $f(x)$ .

**Exercice 6.** Posons  $f(x) = kx^3 + 2x^2 - 3x + 4$ . Pour que  $x + 1$  soit facteur de  $f(x)$ , il faut que lors de la division euclidienne de  $f(x)$  par  $x + 1$ , le reste soit égal à 0. En effet, on pourra alors écrire  $f(x) = (x + 1)q(x)$  où  $q(x)$  sera le quotient de la division.

**Méthode courte.** Un corollaire du cours nous dit que  $f(x)$  est divisible par  $x + 1$  si et seulement si  $f(-1) = 0$ . Or ici,

$$f(-1) = k(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3(-1) + 4 = -k + 2 + 3 + 4 = -k + 9,$$

et donc  $f(-1) = 0$  si et seulement si  $-k + 9 = 0$ , c'est-à-dire que  $f(x)$  est divisible par  $x + 1$  si et seulement si  $k = 9$ .

**Méthode longue.** Effectuons la division, puis choisissons un  $k$  tel que le reste est égal à 0.

$$\begin{array}{r|l}
 kx^3 & +2x^2 & -3x & +4 & x & +1 \\
 -kx^3 & -kx^2 & & & kx^2 & +(2-k)x & +(k-5) \\
 \hline
 & (2-k)x^2 & & & & & \\
 & -(2-k)x^2 & -(2-k)x & & & & \\
 \hline
 & & (k-5)x & & & & \\
 & & -(k-5)x & -(k-5) & & & \\
 \hline
 & & & 4 - (k-5) & & & 
 \end{array}$$

Ainsi le reste de la division est  $4 - (k - 5)$ . On cherche maintenant un  $k$  pour que le reste  $4 - (k - 5)$  soit égal à 0. On pose alors  $4 - (k - 5) = 0$  et en résolvant cette équation, on trouve  $k = 9$ . En remplaçant  $k$  par 9 dans  $f(x)$  on obtient  $f(x) = 9x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = (x + 1)(9x^2 - 7x + 4)$ .

**Exercice 7.**

- a)  $4x + xy = x(4 + y)$ , ce polynôme correspond à **J**)
- b)  $3x + 12 = 3(x + 4) = 3(4 + x)$  correspond à **G**)
- c)  $x^2 + 5y^2z = y^2(x + 5z)$  correspond à **F**)
- d)  $21y - 14 = 7(3y - 2)$  correspond à **C**)
- e)  $-4x - 2y = -2(2x + y)$  correspond à **D**)
- f)  $8x^2z + 4z = 4z(2x^2 + 1)$  correspond à **I**)
- g)  $-18xy - 12x = -6x(3y + 2)$  correspond à **K**)
- h)  $6x^2y + 15xy^3 = 3xy(2x + 5y^2)$  correspond à **A**)
- i)  $16x + 24y + 8 = 8(2x + 3y + 1)$  correspond à **E**)
- j)  $x^3 + 3x^2z + 4x^2 = x^2(x + 3z + 4)$  correspond à **B**)
- k)  $-5xyz - 10z - 15 = -5(xyz + 2z + 3)$  correspond à **H**)

**Exercice 8.** Dans cet exercice, il s'agit de reconnaître quelle identité appliquer à quel polynôme.

- a)  $8x^3 + 27x^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
- b)  $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$
- c)  $\frac{1}{125}x^3 - \frac{3}{10}x^2yz + \frac{15}{4}xy^2z^2 - \frac{125}{8}y^3z^3 = (\frac{1}{5}x - \frac{5}{2}yz)^3$
- d)  $6x^2 - 24y^2 = 6(x^2 - 4y^2) = 6(x - 2y)(x + 2y)$
- e)  $81s^2 - 72st + 64t^2$ , ce polynôme est irréductible.