Preuve : Soit $x \in A$.

- si $x \leqslant \frac{1}{2}$: On prend $\varepsilon = \frac{x}{2}$ car $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}[\subset]0,1[$
- si $x > \frac{1}{2}$: On prend $\varepsilon = \frac{1-x}{2}$ car $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}, \frac{x}{2}+\frac{1}{2}[\subset]0,1[$

Autres exemples : ouverts : $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $]-3,\sqrt{2}[\cup]2,\pi[$, $\mathbb{R}^*$

fermés : $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $\{0\}$, $\{3\} \cup [5,7]$

Remarque : $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont les seuls ensembles ouverts et fermés à la fois.

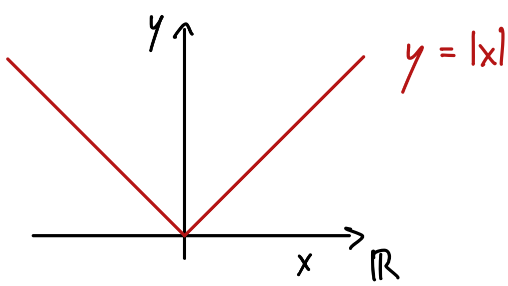
Question : $A = \{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{N}^*\}$ ouvert ou fermé ?

- $\frac{1}{\pi} \in A$ et $\forall \varepsilon > 0$, $]\frac{1}{\pi}-\varepsilon, \frac{1}{\pi}+\varepsilon[\not\subset A$
  donc A n'est pas ouvert.
- $0 \in \mathbb{R}\setminus A$ mais $\varepsilon > 0$, $]-\varepsilon, \varepsilon[\not\subset \mathbb{R}\setminus A$
  car $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{k\pi} < \varepsilon$ et donc $\frac{1}{k\pi} \in]-\varepsilon,\varepsilon[$.
  donc $\mathbb{R}\setminus A$ n'est pas ouvert donc A n'est pas fermé. fin cours 05/10
- A est ni ouvert ni fermé.

1.3 Valeur absolue

Def : la fonction valeur absolue $|\cdot|$ est définie par :

$$|\cdot| : \begin{array}{|l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$



Quelques propriétés : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} |x| = 0 \iff x = 0 \\ |-x| = |x| \\ |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \\ |x| = \sqrt{x^2} \end{cases}$$

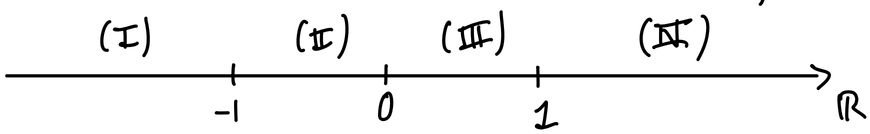
Inégalités triangulaires :

$$\begin{cases} (1) \quad |x+y| \leqslant |x| + |y| \\ (2) \quad |x-y| \geqslant \big||x| - |y|\big| \end{cases}$$

((1) avec $z = y-x \Rightarrow |x+(y-x)| \leqslant |x| + |y-x|$
$\Rightarrow |y-x| \geqslant |y| - |x|$
et en échangeant x et y : $|x-y| \geqslant |x| - |y|$
$\Rightarrow |x-y| \geqslant \big||y|-|x|\big| \Rightarrow (2)$)

Résolution d'inéquations (à maîtriser) :

Décrire $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ |x| \neq 1 \text{ et } \dfrac{1}{1-|x|} < 1 \right\}$ à l'aide d'intervalles.



(I) Si $x < -1$ alors $\dfrac{1}{1-|x|} = \dfrac{1}{1+x} < 0$ donc $x \in A$ $\quad (x < -1 \Rightarrow 1+x < 0)$

(II) Si $-1 < x \leqslant 0$ alors $\dfrac{1}{1-|x|} = \dfrac{1}{1+x} \geqslant 1$ donc $x \notin A$ $\quad (-1 < x \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 < 1+x \leqslant 1$

(III) Si $0 \leqslant x < 1$ alors $\dfrac{1}{1-|x|} = \dfrac{1}{1-x} \geqslant 1$ donc $x \notin A$

(IV) Si $x > +1$ alors $\dfrac{1}{1-|x|} = \dfrac{1}{1-x} < 0$ donc $x \in A$

En conclusion $\underline{A =]-\infty, -1[\ \cup \ ]1, +\infty[}$.
$= \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

Chapitre 2 : Nombres Complexes

Pb : $x^2 = -1$ n'a pas de solution réelle.

On peut définir $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ suivantes :

$$+ : ((a,b),(c,d)) \longmapsto (a+c, \ b+d)$$

$$\cdot : ((a,b),(c,d)) \longmapsto (ac-bd, \ ad+bc)$$

Représentation cartésienne

On a $\quad (a,0) + (b,0) = (a+b, 0)$
$\qquad (a,0) \cdot (b,0) = (a \cdot b, 0)$

Ceci nous permet d'identifier $(x,0) \in \mathbb{C}$ avec $x \in \mathbb{R}$, donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Notation : $i = (0,1)$ "unité imaginaire"

$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1, 0)$

Pour tout $z = (a,b) \in \mathbb{C}$, on peut écrire $z = a\cdot(1,0) + b\cdot(0,1)$

On écrit $z = a\cdot 1 + b\cdot i = a + ib$

C'est la $\boxed{\text{représentation cartésienne de } z}$

On retrouve les règles de calcul définies plus haut :

Pour $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ on a :

- $z_1 \cdot z_2 = (a+ib)(c+id) = a.c - bd + i(ad + bc)$
- $z_1 + z_2 = (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$

2.1 Définitions additionnelles

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

- Le conjugué de z est $\bar{z} = a - ib$

  Propriétés : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $\left\{\begin{array}{l} \overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2} \\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2} \end{array}\right.$

- Partie réelle : $\mathrm{Re}(z) = a = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

- Partie imaginaire : $\mathrm{Im}(z) = b = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

- Module : $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

  En effet : $z \cdot \bar{z} = (a+ib)\cdot(a-ib) = a^2 - i\cdot a \cdot b + i \cdot b \cdot a + b^2$

  $= a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

  On a $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (à vérifier).

- Inverse d'un nombre complexe

  Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ on a $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Leftrightarrow z \cdot \left(\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = 1$

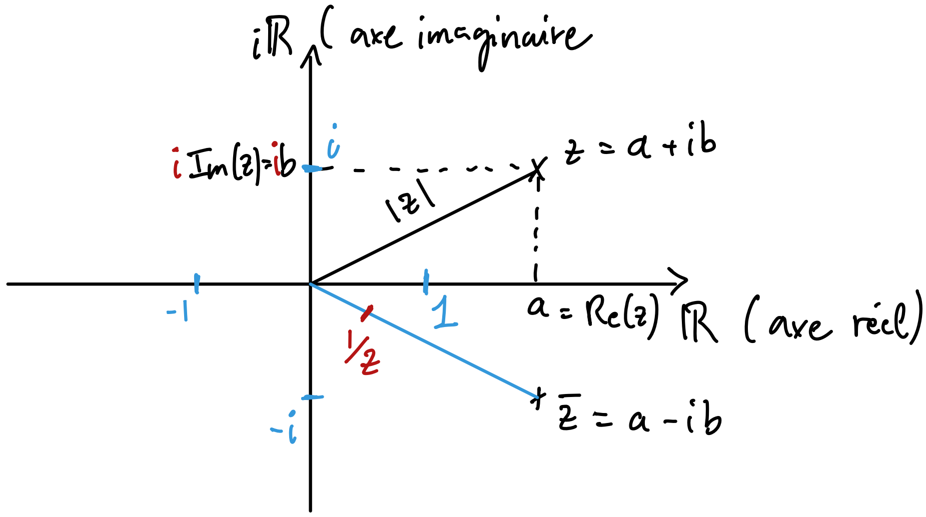
  Donc $\boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}} = z^{-1}$

Remarque : $|z^{-1}| = \left|\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}\right| = \dfrac{|\bar{z}|}{|z|^2} = \dfrac{1}{|z|}$.

- $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)\cdot(c-id)}{(c+id)\cdot(c-id)}$$

$$= \underbrace{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}}_{Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} + i\underbrace{\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)}_{Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

2.2 Plan complexe



2.3 Exponentielle complexe

On définit l'exponentielle complexe, pour $z = a+ib \in \mathbb{C}$ par

$$\boxed{e^z := e^a\left(\cos(b) + i\sin(b)\right)}$$

En particulier, pour $\varphi \in \mathbb{R}$, on a :

Formule d'Euler : $$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Remarque : $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2} = 1$

Propriétés : $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ (vérifier).

- Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ (admis)

On en déduit que $(e^z)^n = e^{n\cdot z}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$

Formule de Moivre (on prend $z = i\varphi$) :

$$\boxed{\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)}$$

Par exemple, pour $n=2$, $\forall \varphi \in \mathbb{R}$:

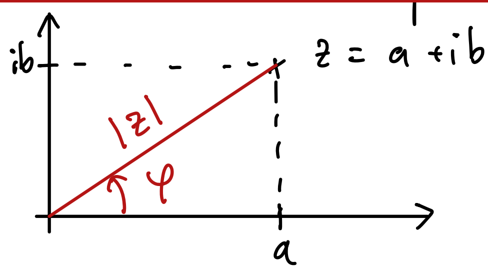
$$\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)^2 = \cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)$$
$$= \left(\cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2\right) + i\cdot\left(2\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

On obtient : $\begin{cases} \cos(2\varphi) = \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2 \\ \sin(2\varphi) = 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi. \end{cases}$

Remarque (conséquence de la formule d'Euler) : pour $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi = \mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases}$$

2.4 Forme polaire d'un nombre complexe



Soit $z \in \mathbb{C}^*$ (où $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$) :

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = |z| \cdot \alpha \quad \text{avec } \alpha = \frac{z}{|z|} \text{ qui a pour module } 1$$
$$\left(\text{en effet } |\alpha| = \frac{|z|}{|z|} = 1\right).$$

Comme $|\alpha| = 1$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

où φ est déterminé à $2k\pi$ près où $k \in \mathbb{Z}$.

Déf : le nombre $\varphi \in]-\pi, \pi]$ est appellé l'argument de z, pour $z \in \mathbb{C}^*$.
On note $\varphi = \arg(z)$

fin cours 09/10