Contraposée de (*) :
"S'il ne pleut pas alors Julie n'est pas sous son parapluie".

(iii) Par récurrence :

Théorème : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ un énoncé qui dépend de n, tel que :
- $P(n_0)$ est vrai ← initialisation
- $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ← hérédité

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, on a $P(n)$ est vraie.

fin cours 28/09 ←

Exemple : Soit $S(n) = 1 + 2 + \dots + n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
Montrer que " $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ " : $P(n)$

- **Initialisation :** $n_0 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} S(n_0) = S(1) = 1 \\ \frac{n_0(n_0+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Donc } P(n_0) \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité :** Supposons que $P(n)$ vraie pour $n \geq n_0 = 1$.

$$\begin{aligned} S(n+1) &= 1 + 2 + \dots + n + n+1 \\ &= S(n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \text{(en utilisant } P(n) \text{ vraie).} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

- Par récurrence, il s'ensuit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

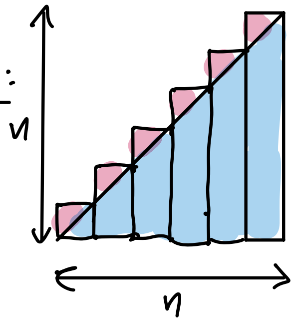
Autre démonstration :

- **Astucieuse** :

$$\begin{aligned} S(n) + S(n) &= 1 + 2 + \dots + n \\ &\quad + n + n-1 + \dots + 1 \\ &= (n+1) + \dots + (n+1) = n(n+1) \end{aligned}$$

Donc $2S(n) = n(n+1) \Rightarrow S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- <u>Geométrique</u> :



$$\begin{aligned} \text{Aire} &= S(n) \\ &= \text{Aire en bleu} + \text{Aire en rouge} \\ &= \frac{n^2}{2} + n \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

0.3.3 Rappels sur les sommes et produits

<u>Notations</u> : $\sum$ somme , $\prod$ produit

Soient $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ des nombres , $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \dots + a_n$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot \dots \cdot a_n$$

choix particulier de suite $a_k = k$

<u>Exemple</u> : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

variable muette.

<u>Règles de calcul</u> : Pour $\ell, m, n \in \mathbb{Z}$, $\ell \leq m \leq n$

- $\displaystyle\sum_{k=\ell}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=\ell}^{n} a_k$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$
- $\displaystyle\left(\prod_{k=\ell}^{m} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=\ell}^{n} a_k$, $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k \cdot b_k = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right)$

<u>Conventions</u> : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ si $m > n$ et $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$ si $m > n$

$\boxed{\text{Formules importantes}}$

(i) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \left(\underbrace{(\text{premier terme}) \cdot \frac{1 - a^{\text{nb de termes}}}{1 - a}}_{\text{valide pour } \sum_{k=m}^{n} a^k = a^m \cdot \frac{1 - a^{n-m+1}}{1 - a}} \right)$$

Preuve : $(1-a)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^{k+1}$

$= \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{i=1}^{n+1} a^i$

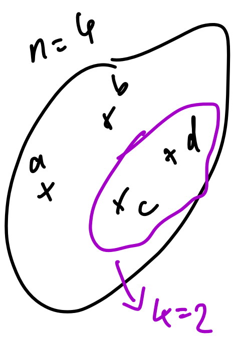
"Somme téléscopique" $(i = k+1)$

$= a^0 - a^{n+1} = 1 - a^{n+1}$

Puis diviser par $1-a$ (autorisé car $a \neq 1$).

(ii) Notation "n factoriel" : $\begin{cases} n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 0! = 1 \end{cases}$

(iii) Coefficients binomiaux :



$\binom{n}{k}$ = nb de sous-ensembles à k éléments dans un ensemble à n éléments. $(n, k \in \mathbb{N},\ n \geqslant k)$

$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$

se lit "k parmi n"

$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ $\left(\text{car } n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\right.$ $\left. = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \cancel{(n-k)} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{(n-k)} \cdot \cancel{(n-k-1)} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}\right)$

(iv) Formule du binôme $(a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N})$

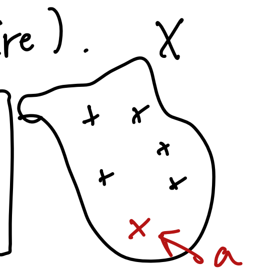
$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)}_{1} \cdot \underbrace{(a+b)}_{2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a+b)}_{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

nb de choix de k facteurs "a" parmi les n possibles.

(v) Formule de Pascal :

$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ pour $k, n \in \mathbb{N}$, $k+1 \leqslant n$.

Soit X un ensemble à $n+1$ éléments et $a \in X$ (arbitraire).



[nb de choix de $k+1$ éléments dans X] = [nb de choix de $k+1$ éléments contenant a] + [nb de choix de $k+1$ éléments ne contenant pas a]

$$\binom{n+1}{k+1} \qquad \binom{n}{k} \qquad \binom{n}{k+1}$$

Triangle de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

$$1 + 1 = 2, \qquad 1 + 2 = 3, \qquad 2 + 1 = 3$$

$$\binom{4}{3} = 4$$

Par exemple :

$$(a+b)^4 = 1\, a^4 + 4 \cdot a^3 b + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot a b^3 + 1 \cdot b^4$$

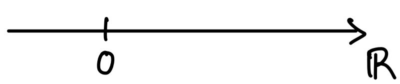
$$\left(= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^k b^{4-k} \right)$$

Remarque : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ est toujours vraie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \qquad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \left(\frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} \right)$$

Chapitre 1 : Nombres Réels

"La droite numérique sans trou"



"Toutes les grandeurs mesurables".

Pour aller plus loin : construction de ℝ

Soit V l'ensemble des nombres r à virgule "infinis".

$r \in V$ s'écrit $r = a, a_1 a_2 a_3 \dots$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a_1, a_2 \in \{0, \dots 9\} \end{cases}$

On définit $\sim$ par $0,999\ldots \sim 1,000\ldots$

$0,25999\ldots \sim 0,26000\ldots$

On peut voir $\mathbb{R}$ comme $V/\sim$ (il faut aussi définir $+, \cdot, \pi, \ldots$)

1.1 Supremum / Infimum / Maximum / Minimum

Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ (qui le distingue de $\mathbb{Q}$) :

"Tout ensemble non vide de $\mathbb{R}$ minoré admet un plus grand minorant dans $\mathbb{R}$."

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ (A sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$).

- Minimum : S'il existe $m \in A$ tel que $\forall x \in A$, $m \leq x$, on dit que m est le minimum de A.
- Maximum : S'il existe $M \in A$ tel que $\forall x \in A$, $M \geq x$ on dit que M est le maximum de A.

Exemple : Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \,;\, 0 < x \leq 1\}$

- A admet un maximum 1 ($1 \in A$)
- A n'admet pas de minimum

fin cours 02/10