

Corrigé Série 03 : Oscillateurs harmoniques

Questions conceptuelles

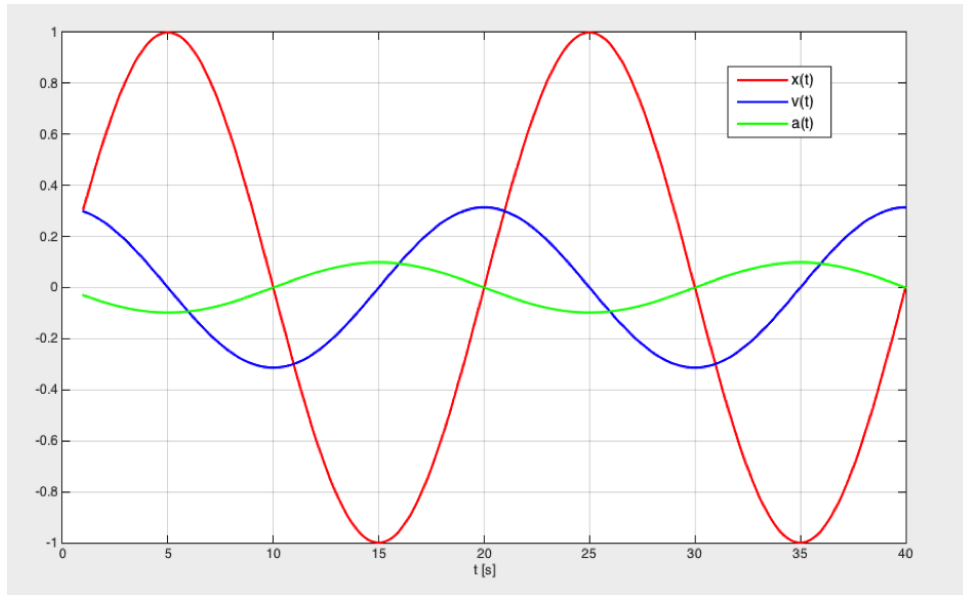
- a) En redéfinissant l'origine du temps et l'origine de l'espace, l'équation horaire d'un oscillateur harmonique peut toujours se ramener à $x(t) = A \sin(\omega t)$. Sa vitesse et son accélération valent alors $v(t) = A\omega \cos(\omega t)$ et $a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t)$. On en déduit que ...
- ... la norme de la vitesse est maximale quand $\omega t = n\pi$, c'est-à-dire à la position d'équilibre $x = 0$ où n est un nombre entier.
 - ... l'accélération est nulle quand $\omega t = n\pi$, c'est-à-dire à la position d'équilibre $x = 0$.
 - ... la vitesse est nulle quand $\omega t = \pi/2 + n\pi$, c'est-à-dire aux positions extrêmes $x = \pm A$.
 - ... la norme de l'accélération est maximale quand $\omega t = \pi/2 + n\pi$, c'est-à-dire aux positions extrêmes $x = \pm A$.
- b) Oui c'est possible. En effet, pour que la vitesse augmente il faut que l'accélération soit positive (par définition), et il est parfaitement possible qu'une accélération diminue tout en restant positive.
- Prenons par exemple un objet se déplaçant sur l'axe x , dont l'accélération décroît linéairement en fonction du temps ($a = a_0(1 - \alpha t)$, $a_0 > 0$, $\alpha > 0$). Calculons la variation de l'accélération et de la vitesse entre les temps t et $t + \Delta t$; avec Δt petit :

$$\Delta a = a(t + \Delta t) - a(t) = a_0(1 - \alpha(t + \Delta t)) - a_0(1 - \alpha t) = -a_0\alpha\Delta t < 0$$

$$\Delta v \simeq a_0(1 - \alpha t)\Delta t > 0$$

Donc tant que $\alpha t < 1$, la variation de la vitesse Δv est positive alors que la variation de l'accélération Δa est négative.

- Imaginez un cycliste dans une pente descendante constante qui pédale au début de la descente, puis se laisse aller en roue libre : l'accélération pendant le laps de temps où il pédale est supérieure à l'accélération s'exerçant lorsqu'il est en roue libre, cependant sa vitesse va continuer à augmenter.
- Dans le mouvement d'un oscillateur harmonique, tel que représenté dans le graphique ci-après pour une pulsation de $\pi/10$, il y a des temps, entre 15s et 20s ou entre 35s et 40s, pendant lesquels l'accélération décroît (courbe verte) alors que la vitesse augmente (courbe bleue). Ceci peut être exprimé analytiquement en considérant le mouvement $x(t) = A \sin(\omega t)$, d'où la vitesse est $v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t)$, l'accélération est $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t)$, et la variation de l'accélération est $\frac{da}{dt} = -A\omega^3 \cos(\omega t)$. La variation de la vitesse est donc de signe opposé à la variation $\frac{da}{dt}$ de l'accélération si $\pi/2 < \omega < \pi$ ou $3\pi/2 < \omega < 2\pi$.

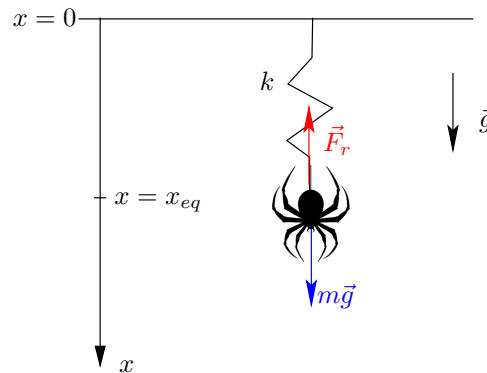


1 Araignée suspendue

Vu depuis le référentiel de l'arbre, les positions sur l'axe Ox sont repérées par la coordonnée x comme indiqué sur le dessin.

a) Système étudié : l'araignée.

Forces qui agissent sur l'araignée de masse m :



$$\text{Pesanteur : } m\vec{g} = mg \hat{e}_x. \quad (1)$$

$$\text{Force élastique du fil : } \vec{F}_r = -k(x - L) \hat{e}_x, \quad (2)$$

où \hat{e}_x indique un vecteur unitaire selon l'axe x .

La position d'équilibre est telle que $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$. Sa projection sur l'axe x donne

$$mg - k(x_{eq} - L) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{eq} = L + \frac{mg}{k}.$$

b) L'équation du mouvement est donnée par la deuxième loi de Newton $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$. Avec les forces énoncées plus haut et projetée sur \hat{e}_x , elle devient :

$$m\ddot{x} = -kx + kL + mg. \quad (3)$$

c) On sait que la solution générale de l'équation différentielle (3) est de la forme $x(t) = A \cos(\omega t + \phi) + \bar{x}$. On la dérive deux fois pour obtenir la vitesse et l'accélération de l'araignée

$$\dot{x}(t) = v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \quad (4)$$

$$\ddot{x}(t) = a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi). \quad (5)$$

En substituant les expressions de $x(t)$ et $\ddot{x}(t)$ dans (3) on trouve

$$-mA\omega^2 \cos(\omega t + \phi) + kA \cos(\omega t + \phi) + k\bar{x} - kL - mg = 0. \quad (6)$$

La relation (6) doit être vérifiée pour chaque t . En particulier, au temps $t = \frac{\pi - \phi}{\omega}$ tel que $\cos(\omega t + \phi) = 0$, on a

$$k\bar{x} - kL - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{mg}{k} + L. \quad (7)$$

La quantité \bar{x} représente donc la position d'équilibre de l'araignée.

Reprenons l'équation (6), elle se simplifie comme suit :

$$(-m\omega^2 + k) A \cos(\omega t + \phi) + \underbrace{k\bar{x} - kL - mg}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow -m\omega^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = m\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- d) Dans la donnée, on nous dit que la vitesse de l'araignée est nulle au temps t_0 où le fil n'exerce aucune force sur elle. Selon l'équation (2), la force du fil est nulle lorsque $x = L$, autrement dit lorsque le fil est au repos. La vitesse au temps t_0 s'écrit

$$\dot{x}(t_0) = -A\omega \sin(\omega t_0 + \phi).$$

Outre le cas trivial où A ou ω sont nuls, qui est le cas de l'araignée immobile, cette expression est nulle quand

$$\sin(\omega t_0 + \phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega t_0 + \phi = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

La position initiale s'écrit donc :

$$x(t_0) = A \cos(n\pi) + \frac{mg}{k} + L.$$

D'autre part $x(t_0) = L$:

$$x(t_0) = A \cos(n\pi) + \frac{mg}{k} + L = L \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{mg}{k} \frac{1}{\cos(n\pi)}.$$

Puisque une amplitude est par définition positive, il faut donc choisir n impair, de sorte que $\cos(n\pi) = -1$, et

$$A = \frac{mg}{k}. \quad (8)$$

Remarques :

- une amplitude est par définition positive, on a gardé la solution positive.
- les constantes \bar{x} et ω (que l'on pourrait appeler ω_0) ne sont pas du même type que A et ϕ . Les paramètres \bar{x} et ω sont des combinaisons des paramètres du problème (raideur k et longueur L du ressort, origine de l'axe x), qui déterminent l'équation différentielle du mouvement, alors que A et ϕ sont des "constantes d'intégration", qui doivent être déterminées par les conditions initiales x_0 et v_0 , pour chaque mouvement qu'effectue l'araignée.

2 Oscillateur à deux ressorts

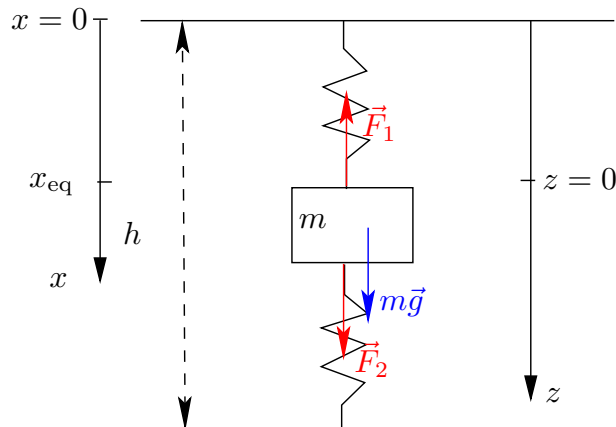
- a) Les forces qui s'appliquent sur le bloc sont
- son poids $m\vec{g}$,
 - la force exercée par le premier ressort

$$\vec{F}_1 = -k_1 x \hat{e}_x,$$

où \hat{e}_x est un vecteur unitaire selon l'axe x ,

- et la force exercée par le deuxième ressort

$$\vec{F}_2 = -k_2(x - h)\hat{e}_x.$$



- b) L'équation du mouvement est la deuxième équation de Newton. En projection sur l'axe x , elle s'écrit

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_1 x + k_2(h - x) + mg \\ &= -(k_1 + k_2)x + k_2 h + mg \\ m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x - (k_2 h + mg) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Afin de montrer que l'équation (9) correspond à l'équation de l'oscillateur harmonique, on doit faire un changement de variable. Pour cela, on définit un axe z parallèle à l'axe x mais dont l'origine se trouve à la position d'équilibre. La position d'équilibre x_{eq} s'obtient en posant $x = x_{eq}$ et $\ddot{x} = 0$ dans l'équation (9). On obtient ainsi $x_{eq} = \frac{k_2 h + mg}{k_1 + k_2}$. Le changement de variable s'écrit :

$$z = x - x_{eq} = x - \frac{k_2 h + mg}{k_1 + k_2} \Rightarrow x = z + \frac{k_2 h + mg}{k_1 + k_2} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{z}.$$

On remplace dans l'équation (9) :

$$m\ddot{z} + (k_1 + k_2) \left(z + \frac{k_2 h + mg}{k_1 + k_2} \right) - (k_2 h + mg) = 0.$$

Après simplification des termes indépendants de z :

$$m\ddot{z} + (k_1 + k_2)z = 0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{k_1 + k_2}{m}z = 0.$$

On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique dont la pulsation est donnée par :

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \quad (10)$$

- c) Dans le cas limite $k_2 = 0$, l'équation du mouvement (9) devient :

$$m\ddot{x} + k_1 x - mg = 0 \quad (11)$$

Ceci revient à enlever le ressort du bas et on obtient l'équation du mouvement pour un bloc tenu par dessus par un ressort vertical.

Dans le cas limite $k_1 = 0$, l'équation (9) devient :

$$m\ddot{x} + k_2(x - h) - mg = 0 \quad (12)$$

Ceci revient à ne garder que le ressort du bas. Ce dernier n'exerce aucune force lorsque le bloc est au niveau du sol.

- d) Pour le bloc, passer du plafond au point le plus bas consiste à effectuer une demi-période d'oscillation d'un mouvement harmonique, la durée de ce déplacement vaut

$$\Delta t_{x=x_{\max}} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}},$$

où T est la période et ω_0 la pulsation de l'oscillateur.

On peut retrouver ce résultat par un calcul explicite. On sait que le point d'équilibre du bloc se trouve à

$$x_{\text{eq}} = \frac{mg + k_2 h}{k_1 + k_2},$$

et que le mouvement est décrit par

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + x_{\text{eq}}.$$

À $t = 0$, le bloc est lâché du plafond sans vitesse initiale, à $x_0 = 0$, ce qui correspond à la position la plus éloignée du point d'équilibre. L'amplitude A vaut donc

$$A = -x_{\text{eq}} = -\frac{mg + k_2 h}{k_1 + k_2} \text{ et } \phi = 0,$$

(on aurait aussi pu choisir $\phi = \pi$ et $A = x_{\text{eq}}$) et le mouvement s'écrit :

$$x(t) = -\left(\frac{mg + k_2 h}{k_1 + k_2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} t\right) + \frac{mg + k_2 h}{k_1 + k_2}.$$

Le maximum x_{\max} de l'amplitude (la hauteur la plus basse) est atteint pour $\cos\left(\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} t\right) = -1$, d'où

$$x_{\max} = 2 \frac{k_2 h + mg}{k_1 + k_2}.$$

On retrouve $\Delta t_{x=x_{\max}} = \frac{\pi}{\omega}$.

Application numérique :

$$\begin{aligned} \Delta t_{x=x_{\max}} &= \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \simeq \frac{3 \times (1 + 0.05)}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (1 + 0.05) \\ &\simeq \frac{1.73}{2} \times (1 + 0.05) \\ &= 0.86 \times (1 + 0.05) = 0.86 + 0.04 = 0.90 \text{ s} \end{aligned}$$

$$x_{\max} = 2 \frac{20 \times 4 + 10 \times 10}{100 + 20} = 2 \times \frac{180}{120} = 2 \times \frac{3 \times \cancel{60}}{2 \times \cancel{60}} = 3 \text{ m}$$

Il est également possible de trouver le même résultat en utilisant la conservation de l'énergie. Toutes les forces s'appliquant sur le bloc sont conservatives ; elles dérivent d'énergies potentielles qui permettent de définir l'énergie mécanique totale du bloc comme

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 (h - x)^2 - m g x,$$

où v est la vitesse du bloc. L'énergie potentielle dans le champ de pesanteur vaut $-mgx$ car l'axe x est dirigé vers le bas.

Au départ, en $x = 0$ avec $v = 0$ on a

$$E_i = \frac{1}{2}k_2h^2.$$

Au point le plus bas de la trajectoire (où $v = 0$ également), on a

$$E_f = \frac{1}{2}k_1x_{\max}^2 + \frac{1}{2}k_2(h - x_{\max})^2 - mgx_{\max}.$$

Par conservation de l'énergie mécanique $E_i = E_f$:

$$\frac{1}{2}k_1x_{\max}^2 + \frac{1}{2}k_2(h - x_{\max})^2 - mgx_{\max} = \frac{1}{2}k_2h^2.$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$x_{\max} \left[x_{\max} \frac{k_1 + k_2}{2} - (k_2h + mg) \right] = 0.$$

Ses deux solutions sont les coordonnées des points où la vitesse est nulle, soit le point le plus haut de la trajectoire en $x = 0$ et le point le plus bas de la trajectoire en

$$x_{\max} = 2 \frac{k_2h + mg}{k_1 + k_2}.$$

3 L'oscillation amortie de l'araignée

Le système considéré est l'araignée, et on l'étudie par rapport à l'arbre (le référentiel) en utilisant un repère dont l'axe Ox est vertical, dirigé vers le bas, et d'origine au point d'attache du fil.

a) L'équation du mouvement est la même que dans le Problème 1 (Eq. 3), mais avec un terme supplémentaire pour tenir compte des frottements. La projection de la force de frottement sur l'axe vertical est donnée par $F_x = -\eta\dot{x}$, et l'équation du mouvement devient

$$m\ddot{x} = -kx + kL + mg - \eta\dot{x}. \quad (13)$$

b) Pour répondre à la question, il est nécessaire d'éliminer par un changement de variable les termes constants de l'équation du mouvement. Pour nous guider, l'équation du mouvement peut être réécrite

$$\ddot{x} + \frac{\eta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m} \left(x - L - \frac{mg}{k} \right) = 0. \quad (14)$$

Avec le changement de variable

$$z = x - L - \frac{mg}{k} \quad (15)$$

on a que $\dot{x} = \dot{z}$ et $\ddot{x} = \ddot{z}$, et l'équation du mouvement devient

$$\ddot{z} + \frac{\eta}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0. \quad (16)$$

On peut alors identifier les coefficients avec les paramètres γ et ω_0 définis au cours :

$$\gamma = \frac{\eta}{2m} \quad (17)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (18)$$

L'oscillation est sous-critique si $\gamma < \omega_0$, d'où on trouve la condition sur le paramètre η :

$$\frac{\eta}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \eta < 2\sqrt{km}. \quad (19)$$

Remarque : puisque $F = \eta\dot{x}$, le paramètre η a comme unité des kilogrammes par seconde, [kg/s], et l'on peut vérifier que le résultat ci-dessus est consistant car \sqrt{km} a aussi l'unité de [kg/s].

c) La pulsation effective de l'oscillation est

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\eta^2}{4m^2}} = \frac{\sqrt{4km - \eta^2}}{2m}. \quad (20)$$

d) L'amplitude est proportionnelle à $e^{-\gamma t}$. Au temps $t = 0$, ce facteur vaut 1. Il sera égale à $\frac{1}{2}$ au temps $t_{1/2}$, que l'on peut déterminer comme

$$e^{-\gamma t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\gamma t_{1/2} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\gamma} = \frac{m}{\eta} 2 \ln 2. \quad (21)$$

Il reste donc maintenant à déterminer le nombre d'oscillations N durant un temps $t_{1/2}$: $N = t_{1/2} \nu_1$, où ν_1 est la fréquence effective de l'oscillation. Avec

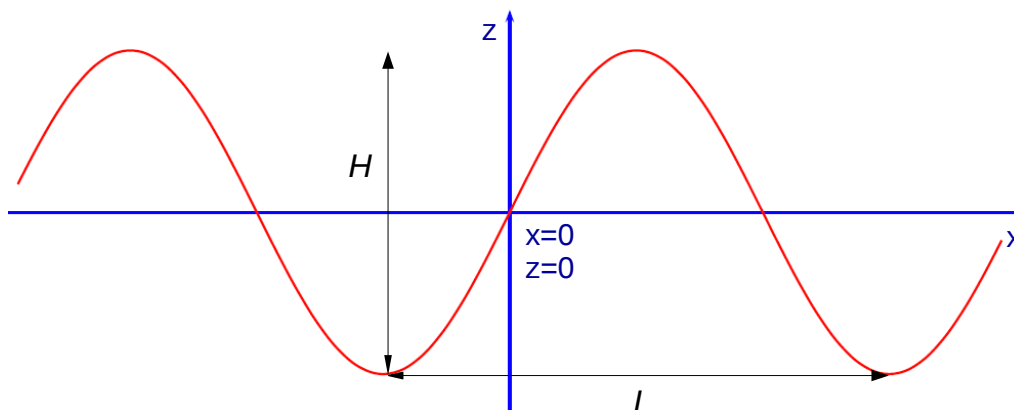
$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{4km - \eta^2}}{2m}, \quad (22)$$

on trouve finalement

$$N = t_{1/2} \nu_1 = \left(\frac{m}{\eta} 2 \ln 2 \right) \left(\frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{4km - \eta^2}}{2m} \right) = \frac{\ln 2}{2\pi} \frac{\sqrt{4km - \eta^2}}{\eta}. \quad (23)$$

4 Champ de bosses

On choisit des axes x et z comme sur le dessin ci-dessous. On choisit l'origine du temps de telle sorte que $t = 0$ quand $x = 0$.



a) On sait que la route a un profil sinusoïdal. La hauteur de la roue (coordonnée z) s'écrit donc :

$$h(x) = A \sin(\alpha x)$$

où A et α sont les paramètres du profil sinusoïdal.

D'après les données du problème, on peut écrire $A = \frac{H}{2}$ et $\alpha = \frac{2\pi}{L}$, et donc

$$h(x) = \frac{H}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right). \quad (24)$$

La voiture a une vitesse horizontale constante v_x . On peut donc écrire $x(t) = v_x t$, l'équation horaire de la roue devient :

$$h(t) = \frac{H}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{L}v_x t\right). \quad (25)$$

b) Soit $z(t)$, la hauteur de la voiture. L'équation du mouvement de la voiture est donnée par la deuxième loi de Newton $\Sigma \vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_r = m\vec{a}$ où \vec{P} est le poids de la voiture et \vec{F}_r la force de rappel du ressort. En projection sur l'axe z , on a $P = -mg$ et $F_r = -k\Delta z$ où Δz représente l'allongement du ressort et peut s'écrire $\Delta z = z(t) - h(t) - l_0$. Pour s'en convaincre, on peut se dire que $z(t)$ représente la position (verticale) de la voiture au cours du temps et $h(t)$ la position (verticale) de la roue au cours du temps. $z(t) - h(t)$ est dès lors la distance voiture-roue, c'est-à-dire la longueur du ressort. Et donc finalement $z(t) - h(t) - l_0$ est la différence entre la longueur du ressort et sa longueur au repos. Cette expression est donc bien l'allongement du ressort Δz . Pour se convaincre du signe $-$, on peut faire le raisonnement suivant : si $z(t) - h(t) - l_0 > 0$, alors le ressort est étiré, il exerce une force vers le bas. Le signe de cette force est négatif ce qui est cohérent car l'axe z est dirigé vers le haut. Si $z(t) - h(t) - l_0 < 0$ alors la force est dirigée vers le haut et son signe est positif.

En projection sur l'axe z , l'équation du mouvement s'écrit donc

$$m\ddot{z} = -mg - k[z - h(t) - l_0] = -mg - kz + kl_0 + k\frac{H}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{L}v_x t\right). \quad (26)$$

Si on pose $\omega = \frac{2\pi v_x}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, on réécrit cette équation :

$$\ddot{z} + g + \omega_0^2 z - \omega_0^2 l_0 = \omega_0^2 \frac{H}{2} \sin(\omega t). \quad (27)$$

c) On remarque que l'équation (27) peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{z} + \omega_0^2 \left(z + \frac{g}{\omega_0^2} - l_0 \right) = \omega_0^2 \frac{H}{2} \sin(\omega t),$$

qui est presque l'équation demandée. Pour y arriver, il suffit de faire un changement de variable $z \rightarrow u$ avec

$$u = z + \frac{g}{\omega_0^2} - l_0,$$

ce qui donne $\ddot{z} = \ddot{u}$, et donc on obtient l'équation

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 \frac{H}{2} \sin(\omega t), \quad (28)$$

qui a bien la forme demandée, si $\alpha_0 = \omega_0^2 \frac{H}{2}$.

d) Dans la donnée, on nous propose d'utiliser une solution de la forme

$$u(t) = \rho \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{avec} \quad \varphi = 0. \quad (29)$$

On la dérive deux fois et on l'introduit dans l'équation du mouvement (28), qui devient

$$-\rho\omega^2 \sin(\omega t) + \omega_0^2 \rho \sin(\omega t) = \omega_0^2 \frac{H}{2} \sin(\omega t).$$

En divisant par $\sin(\omega t)$, on obtient :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)\rho = \omega_0^2 \frac{H}{2},$$

et donc

$$\rho = \frac{H}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}.$$

La grandeur ρ représente l'amplitude des oscillations verticales de la masse m . Dans le cas de notre voiture, plus cette valeur sera petite, plus notre voiture sera confortable.

Il faut distinguer ici 3 cas différents :

- La vitesse est telle que $\omega = \omega_0$, c'est-à-dire $v_x = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{L}{2\pi}$. Dans ce cas-là l'amplitude des oscillations tendra vers l'infini (phénomène de résonance) et le véhicule sera très inconfortable.
- La vitesse est plus petite que $\sqrt{\frac{k}{m}} \frac{L}{2\pi}$. Dans ce cas, l'amplitude des oscillations sera finie, mais ne pourra pas descendre en dessous d'une certaine limite. En effet, lorsque $v_x \rightarrow 0$ (c'est à dire $\omega \rightarrow 0$), on a

$$u_{max} \rightarrow \frac{H}{2}.$$

- La vitesse est plus grande que $\sqrt{\frac{k}{m}} \frac{L}{2\pi}$. Dans ce cas, plus la vitesse est grande, plus l'amplitude sera petite. Dans le cas limite v_x ou $\omega \rightarrow \infty$ on a $u_{max} \rightarrow 0$.

En conclusion, pour rouler avec le plus de confort possible sur une route bosselée, il faut rouler le plus vite possible. Et lorsque cela n'est pas possible, il faut rouler avec une vitesse très faible. Mais dans tous les cas éviter de rouler avec une vitesse proche de celle qui correspond à la résonance. Ce phénomène est illustré dans le film *Le salaire de la peur* de Henri-Georges Clouzot avec Yves Montand et Charles Vanel.