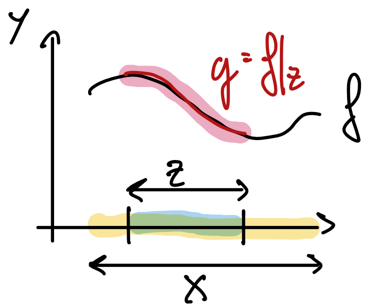
Restriction et Prolongement de fonction

Soit $f : X \to Y$ et $g : Z \to Y$ avec $Z \subset X$

Si $\forall x \in Z$, $g(x) = f(x)$, on dit que :

- g est <u>la restriction</u> de f à Z, notée $f|_Z$
- f est <u>un prolongement</u> de g à X.



0.2 Nombres entiers et rationnels ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$)

<u>Entiers naturels</u> : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

"privé de"

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(aussi $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$)

union

Remarque : trouver $x \in \mathbb{N}$ tel que $2 + x = 1$? Pas de solution.

<u>Entiers relatifs</u> : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

<u>Pour aller plus loin :</u> construction de $\mathbb{Z}$.

On définit sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relation :

$(m, n) \sim (p, q)$ ssi $\cancel{m - n = p - q}$ pas possible car fait intervenir les nb relatifs, que l'on souhaite définir.

ssi $m + q = p + n$

On peut montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

On peut construire $\mathbb{Z}$ comme étant : $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$

- On a $2 + x = 1$, a bien une solution $x \in \mathbb{Z}$ donnée par $-1 \in \mathbb{Z}$
  (-1 représente la classe d'equivalence $-1 \equiv \{(0, 1), (1, 2), \dots\}$)

Par contre $2 \cdot x = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Nombres rationnels $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;;\; p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Plus aller plus loin : construction de $\mathbb{Q}$

Dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on note $(p,q) \equiv \frac{p}{q}$. On a la relation d'équivalence :

$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ ssi $ad = bc$ (vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence).

"si et seulement si"

On peut construire $\mathbb{Q}$ comme étant $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$.

Addition : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Multiplication : $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

vérifier que ces définitions sont compatibles avec la relation d'équivalence.

Tout nombre rationnel s'écrit sous la forme de fraction irréductible de manière unique : $x = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux

pas de diviseur commun plus grand que 1.

Problème : $x^2 = 2$ n'a pas solution dans $\mathbb{Q}$.

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{Q}$. On a $x = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux.

- Supposons que $x^2 = 2$.

On a donc $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad (*)$

$\Rightarrow p^2$ est pair

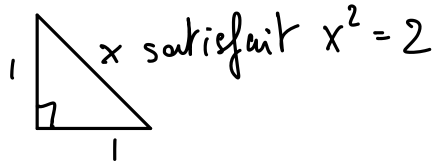
$\Rightarrow p$ est pair

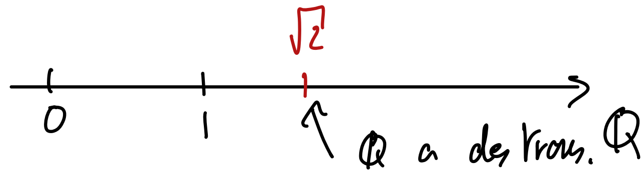
$\Rightarrow p = 2a$ avec $a \in \mathbb{Z}$

On déduit de $(*)$ que $(2a)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2a^2 = q^2$

$\Rightarrow q^2$ est pair $\Rightarrow q$ est pair.

Ceci contredit que p et q sont premiers entre eux (car p et q sont pairs)
Nécessairement $x \in \mathbb{Q}$ implique $x^2 \neq 2$. ■





0.3 Logique et techniques de preuve

Proposition : affirmation qui soit vraie (V) soit fausse (F)

- "$2 + 4 = 10$" Faux
- "$\exists x \in \mathbb{Q}$, $x^2 = 2$" Faux
  ("," : lire "tel que")
- "Cette phrase n'a pas de verbe" pas une proposition (grammaire, auto-référence, variables non définies).

Soit A et B des propositions :

(A et B) : vraie ssi A est vraie et B est vraie

(A ou B) : vraie ssi A est vraie et/ou B est vraie

non (A) (parfois notée $\neg A$) : vraie ssi A est fausse

Tables de vérité :

A	B	A et B	A ou B	non A
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Exemple : Non("Tous les moutons sont blancs")
= Il existe (au moins) un mouton qui n'est pas blanc"

- Ordre des quantificateurs "$\exists$" et "$\forall$" est important :
  (i) Tout le monde aime (au moins) une boisson (par exemple, l'eau).
  (ii) Tout le monde aime (au moins) une boisson (par exemple ? moi j'aime le lassi).

Désambiguïsation :

(i) $\exists$ une boisson B, telle que $\forall$ personne P, P aime B.

(ii) $\forall$ personne P, $\exists$ une boisson B, telle que P aime B.

Exercice de négation :

non(i) : $\forall$ boisson B, $\exists$ personne P, P n'aime pas B.

non(ii) : $\exists$ personne P, $\forall$ boisson B, P n'aime pas B.

Implications et équivalences.

Soit A et B deux propositions :

$A \Rightarrow B$: signifie "A implique B", "si A alors B".

$A \Leftrightarrow B$: signifie "A est équivalent à B"

Tables de vérité :

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Exemple : A : "Julie est sous son parapluie"

B : "Il pleut"

(*) $A \Rightarrow B$: si Julie est sous son parapluie alors il pleut.

("$\Rightarrow$" est différent de la notion de causalité).

0.3.2. Techniques de preuve

(i) Par l'absurde : pour montrer A, on montre $non(A) \Rightarrow Faux$

(vérifier $A \Leftrightarrow [non(A) \Rightarrow Faux]$ à l'aide d'une table de vérité.

(ii) Par contraposée : pour montrer $A \Rightarrow B$, on montre $\boxed{non\ B \Rightarrow non\ A}$.

(vérifier $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [non\ B \Rightarrow non\ A]$ avec une table de vérité.

Contraposée de (*) :

"S'il ne pleut pas alors Julie n'est pas sous son parapluie".

(iii) Par récurrence :

Théorème : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ un énoncé qui dépend de n, tel que :

- $P(n_0)$ est vrai
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, on a $P(n)$ est vraie.

fin cours 28/09