

Analyse I – Série 2

Remarque générale.

Les exercices 1 et 5 sont des questions de type Vrai ou Faux (V/F). Pour chaque question, répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie. Une étoile (★) indique un exercice un peu plus difficile.

Echauffement 1. (Notion de couple)

Soient les ensembles $X = \{1, 2\}$ et $Y = \{3, 4\}$. Est-ce que le couple $(3, 2)$ est un élément du produit cartésien $X \times Y$?

Exercice 1. (V/F : ensembles)

Soient $A, B, C \subset \mathbb{R}$ des ensembles non vides.

On note $A \setminus B$ pour la différence des ensembles A et B , et $A \cap B$ pour leur intersection, c.-à-d.

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} \quad \text{et} \quad A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

	V	F
a) $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Exercice 2. (Relations d'équivalence)

Soit X un ensemble. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalence. Quels sont dans les deux cas les ensembles quotient X/\sim ?

- a) $x \sim y$ ssi $x = y$, pour tout $x, y \in X$; (NB : "ssi" est une abbréviatiion pour "si et seulement si")
- b) $x \sim y$, pour tout $x, y \in X$.

Exercice 3. (Relations d'équivalence)

- a) Montrer que $x \sim y$ ssi $xy > 0$, définit une relation d'équivalence sur \mathbb{Z}^* . Quel est l'ensemble quotient ?
- b) Montrer que $x \sim y$ ssi $x - y$ est pair, définit une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} . Quel est l'ensemble quotient ?
- c) Est-ce que $x \sim y$ ssi $x - y$ est impair, définit une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} ?

Exercice 4. (Graphes, fonctions)

Soient les ensembles $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$.

- a) Trouver tous les sous-ensembles de $X \times Y$ qui sont le graphe d'une fonction de X dans Y .
- b) Combien de ces fonctions sont injectives, surjectives, bijectives?
- c) Pour les fonctions injectives, trouver le graphe de la fonction réciproque correspondante.

Exercice 5. (V/F : fonctions)

Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- | | V | F |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a) $f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow f = g$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Si f et g sont injectives, alors $f \circ g$ est injective. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Si $f \circ f$ est injective, alors f est injective. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| e) Si $f \circ g$ est injective, alors f est injective. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| f) Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Exercice 6. (Relations)

La relation d'orthogonalité entre deux droites du plan est-elle symétrique? réflexive? transitive?

Exercice 7. (Raisonnement par récurrence)

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

- a) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (somme de carrés d'entiers);
- b) $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ (somme alternée de carrés d'entiers);
- c) $(\star) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ (somme de cubes d'entiers).

Calculer $n = \sum_{k=0}^{1000} (k+1)(3k+2)$.

Exercice 8. (Raisonnement par récurrence)

Montrer par récurrence l'**inégalité de Bernoulli** : pour tout entier $n \geq 1$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall x \geq -1.$$

Exercice 9. (Négation et quantificateurs)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

- 1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
- 2. $(\star) \forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$.
- 3. $(\star) \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$.