Corrigé Test 1 - Probabilités et statistiques 12 octobre 2022

Exercice 1. *(1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3 + 2 = 18 points) Burier juin 2022*

Simon planifie une randonnée de cinq étapes. L'ordre des cinq étapes est fixé à l'avance mais il peut, lors de chaque étape, passer par le bord de mer, par les montagnes ou par la route.

Partie A

a) De combien de façons différentes Simon peut-il planifier sa randonnée ?
$3^5 = \boxed{243}$ planifications différentes.

b) De combien de façons différentes peut-il planifier sa randonnée s'il veut uniquement passer par le bord de mer ?
$\boxed{\text{Une seule façon}}$, rester en bord de mer.

c) De combien de façons différentes peut-il planifier sa randonnée s'il ne veut pas passer par la route ?
$2^5 = \boxed{32}$ planifications sans passer par la route.

d) De combien de façons différentes peut-il planifier sa randonnée s'il veut faire 2 étapes par la mer, 2 étapes par les montagnes et 1 étape par la route ?
$\dfrac{5!}{2!\,2!} = \boxed{30}$ planifications avec 2 par la mer, 2 par les montagnes et 1 par la route.

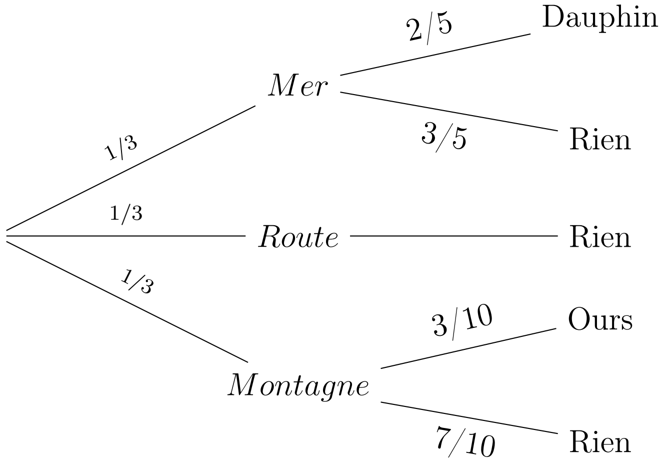
Variante : $C_2^5 \cdot C_2^3 \cdot C_1^1$

e) De combien de façons différentes peut-il planifier sa randonnée s'il veut passer au moins une fois par les montagnes ? $3^5 - 2^5 = \boxed{211}$ planifications en passant au moins une fois par les montagnes.

Partie B

Lors de chaque étape, Simon choisit au hasard s'il passe par le bord de mer, par les montagnes ou par la route. Par le bord de mer, il a 40% de chance de voir des dauphins. Par les montagnes, il a 30% de chance de voir un ours. Par la route, il n'a aucune chance de voir un animal. Depuis le bord de mer on ne peut pas voir d'ours et depuis les montagnes on ne peut pas voir de dauphin.

a) Représenter la situation de la première étape par un arbre.



b) Quelle est la probabilité que Simon ait vu un dauphin lors de sa première étape ?

$P(\text{Mer} \cap \text{Dauphin}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15} \cong \boxed{13,33\,\%}$

c) Quelle est la probabilité qu'il ait vu un dauphin ou un ours lors de sa première étape ?

$P(\text{Dauphin} \cup \text{Ours}) = P(\text{Dauphin}) + P(\text{Ours}) = \frac{2}{15} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{30} \cong \boxed{23,33\,\%}$

d) Quelle est la probabilité qu'il ait vu un des deux animaux lors de sa première étape sachant qu'il n'est pas passé par la route ?

$P(\text{Dauphin} \cup \text{Ours} \,|\, \overline{\text{Route}}) = \frac{P(\text{Dauphin} \cup \text{Ours})}{P(\overline{\text{Route}})} = \frac{7/30}{2/3} = \frac{7}{20} = \boxed{35\,\%}$

Variante : $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$

e) Quelle est la probabilité que Simon ait vu au moins une fois un dauphin lors de sa randonnée sachant qu'il a fait toutes les étapes au bord de la mer ?

$P(\text{Au moins un dauphin} \,|\, 5 \text{ étapes mer}) = 1 - P(\text{Aucun dauphin} \,|\, 5 \text{ étapes mer})$

$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \boxed{92,224\,\%}$

Exercice 2. *(1 + 1 + 1 + 2 = 5 points) Probabilités*

Dans une classe de gymnase, il y a 4 prix à attribuer. Sachant que cette classe est composée de 16 élèves, calculer le nombre de façons d'attribuer ces 4 prix dans chacun des cas suivants :

a) les prix sont tous différents et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul prix ;
   Il y en a $A_4^{16} = 43'680$.

b) les prix sont tous différents et chaque élève peut recevoir plusieurs prix ;
   Il y en a $16^4 = 65'536$.

c) les prix sont identiques et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul prix.
   Il y en a $C_4^{16} = 1820$.

d) les prix sont identiques et chaque élève peut recevoir plusieurs prix.
   Il y en a $C_{16-1}^{16+4-1} = C_{15}^{19} = 3876$.

Exercice 3. *(4 points)*

Démontrer la proposition suivante : Soit X une variable aléatoire. Alors

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2.$$

Si $E[X] = \mu$, la définition de la variance utilise le carré $(X - \mu)^2 = X^2 - 2\mu X + \mu^2$.
Par linéarité de l'espérance, on voit que

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - 2\mu E[X] + E[\mu^2] = E[X^2] - \mu^2$$

puisque l'espérance de la variable aléatoire constante μ^2 vaut μ^2.

Exercice 4. *(5 points)*

Une banque possède un dispositif d'alarme. S'il y a cambriolage, le dispositif se met en marche avec une probabilité de 0.95. Par ailleurs, la probabilité que le dispositif se mette en marche un jour sans qu'il y ait cambriolage est égale à 0.01 et la probabilité qu'il y ait un cambriolage un jour donné est de 0.004.

a) Calculer la probabilité qu'il y ait alarme un jour donné.
   On pose A : "l'alarme sonne" et C : "il y a cambriolage". Alors par la formule des probabilités totales, on a

$$P(A) = P(A|C) \cdot P(C) + P(A|C^c) \cdot P(C^c) = 0,004 \cdot 0,95 + 0,996 \cdot 0,01 = 0,01376 = 1,376\%$$

b) Calculer la probabilité qu'il y ait vraiment un cambriolage lorsque l'alarme se met un marche.

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|C) \cdot P(C)}{P(A)} = \frac{0,004 \cdot 0,95}{0,01376} \cong 0,2762 = 27,62\%$$

Exercice 5. *(3 + 1 = 4 points)*

Dans une urne, il y a 5 boules rouges et 8 boules noires. On vous propose le jeu suivant :

Vous payez 10 francs puis vous tirez successivement et sans remise 2 boules de l'urne.

Si vous tirez 2 boules rouges, vous gagnez 30 francs. Si vous tirez une boule rouge, vous gagnez 10 francs. Si vous ne tirez aucune boule rouge, vous ne gagnez rien.

On note X le gain **net** du joueur.

a) Calculer l'espérance de X.
$E(X) = 20 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} + 0 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{8}{12} \cdot 2 + (-10) \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} = -\frac{40}{39} \cong -1,02$

b) Ce jeu est-il équitable ? Justifier par une phrase.
Non, ce jeu n'est pas équitable car l'espérance n'est pas nulle. On perd en moyenne 1 franc par partie.

Exercice 6. *(5 + 3 + 1 + 2 = 11 points) Statistiques*

Une étude (fictive !) aimerait déterminer s'il y a une relation entre la taille des pieds d'enfants de 10 ans et leur quotient intellectuel. Pour cela, ils constituent un échantillon de 10 enfants et obtiennent les données suivantes :

Enfant	Pointure	QI
A	31	50
B	31	55
C	32	52
D	33	56
E	33	63
F	34	65
G	35	69
H	36	90
I	37	110
J	38	150

a) On considère X la variable aléatoire qui donne la pointure du pied et Y la variable aléatoire qui donne le QI. Calculer l'espérance et la variance pour X et Y.
On a $E[X] = 34$, $E[X^2] = 1161,4$, $\text{Var}(X) = 5,4$, $E[Y] = 76$, $E[Y^2] = 6702$ et $\text{Var}[Y] = 926$.

b) Calculer la corrélation entre X et Y.
On a $E[XY] = 2648,1$, $\text{Cov}(X,Y) \cong 64,1$ et $\text{Corr}(X,Y) \cong 0,90$

c) Pourrait-on approximer la variable Y en fonction de la variable X ? Justifier par une phrase.
Oui, car la corrélation est proche de 1.

d) Si on peut approximer Y en fonction de X, donner la formule à utiliser (sans calculs).
La formule est

$$Z = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(X)}(X - E(X)) + E(Y)$$

ou

$$Z = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot X + E(Y) - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot E(X)$$