

Série 12

Pour le 6 décembre 2023

Exercice 1

On aimerait construire une boîte en carton fermée de forme parallélépipède rectangle de base carrée d'un demi-litre de volume. Quelles doivent être les dimensions de la boîte pour que la surface de carton soit minimale ?

Exercice 2

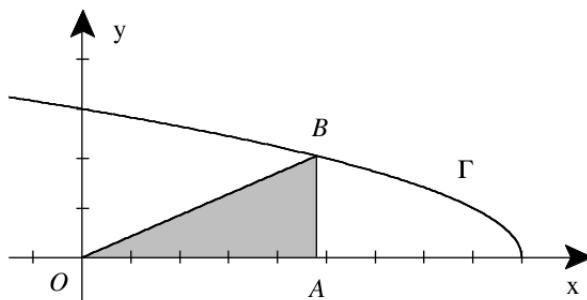
Une feuille de papier doit contenir 600 cm^2 de texte imprimé. Sachant que les marges supérieure et inférieure doivent être de 5 cm chacune et que les marges droite et gauche doivent être de 3 cm chacune, trouve les dimensions de la feuille pour lesquelles il faudra un minimum de papier.

Exercice 3

Un fermier dispose de 500 mètres de treillis pour clôturer un pré rectangulaire dans lequel il aimerait faire paître ses vaches. La grange se trouve sur un côté du terrain, si bien qu'il n'aura besoin d'installer la clôture que sur trois côtés. Détermine les dimensions du pré qui donneront l'aire de pâturage maximale.

Exercice 4

On considère le triangle rectangle OAB situé dans le premier quadrant dont le point B parcourt la courbe Γ d'équation $y = \sqrt{9 - x}$.



Déterminer les coordonnées du point A pour que l'aire du triangle soit maximale.

Exercice 5

Un menuisier veut fabriquer un tiroir dont la profondeur, du devant à l'arrière, est de 40 cm et dont le volume est de $8'000 \text{ cm}^3$. Si le devant du tiroir coûte CHF 0,08 par cm^2 et que le reste du tiroir coûte CHF 0,04 par cm^2 , quelles doivent être les dimensions du tiroir pour que le coût de fabrication soit minimal? Que vaut ce coût?

Exercice 6

Effectue l'étude des fonctions réelles suivantes :

- a) $f(x) = x^x$;
 b) $f(x) = \text{Argtanh}(\sinh x)$.

Exercice 7

Calcule les primitives des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

- a) $f(x) = e^{3x}$;
 b) $f(x) = (x + 2)^2$;
 c) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$;

Indication : Commence par écrire cette fonction comme somme de deux fractions, puis utilise l'exercice 11 pour trouver la primitive.

- d) $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$;

Indication : faire comme pour c).

- e) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$;
 f) $f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + 7}}$;
 g) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}$;
 h) $f(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^3}$;
 i) $f(x) = x \cosh(x^2) + 2x$.

Exercice 8

Trouve les huit solutions du système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2 \ln(6). \end{cases}$$

Exercice 9

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- a) Si une fonction admet une primitive, alors elle en admet une infinité.
- b) La seule fonction qui n'a qu'une primitive est la fonction constante nulle.
- c) La fonction $f(x) = |x|$ n'a pas de primitive sur \mathbb{R} car elle n'est pas dérivable (en zéro).
- d) Si $\sinh(2x) + \sinh x = 0$, alors $x = 0$;
- e) La primitive d'une fonction convexe est une fonction croissante ;
- f) La primitive d'une fonction dérivable strictement croissante est une fonction convexe.

Exercice 10

Résoudre l'équation $\cosh^2 x - 4 \sinh x + 2 = 0$.

Exercice théorique**Exercice 11**

Soit f une fonction dont F est une primitive.

- a) Calcule l'intégrale indéfinie de la fonction $\frac{f'(x)}{f(x)}$;
- b) Calcule l'intégrale indéfinie de la fonction $\frac{1}{x}$ sur $]0, \infty[$;
- c) Calcule l'intégrale indéfinie de la fonction $\frac{1}{x}$ sur $] - \infty, 0[$ et corrige éventuellement ta première réponse (attention au signe !)
- d) Calcule l'intégrale indéfinie de la fonction $\frac{2}{4x - 3}$;
- e) Calcule l'intégrale indéfinie des fonctions $\tan x$ et $\cot x$.