

# Série 11

Pour le 29 novembre 2023

## Exercice 1

Mets les nombres complexes suivants sous forme cartésienne :

$$e^{\frac{3\pi i}{2}}, \quad \sqrt{2}ie^{\frac{\pi i}{2}}, \quad \frac{2e^{\frac{\pi i}{3}}}{1+i}, \quad \frac{i}{e^{\frac{\pi i}{4}}}$$

## Exercice 2

Calcule l'exponentielle complexe  $e^z$  lorsque  $z = 1 + i$ ,  $z = e^i$ ,  $z = e^{\pi i}$  et  $z = -2i$ . Dans les quatre cas, donne la forme cartésienne et indique quel est le module et l'argument.

## Exercice 3

**Vrai ou faux ?** Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- L'exponentielle complexe  $z \mapsto e^z$  coïncide avec l'exponentielle réelle lorsque  $z$  est un nombre réel.
- L'exponentielle complexe est injective.
- L'exponentielle complexe est surjective sur  $\mathbb{C}^*$ .
- Les seules similitudes du plan qui ne sont pas des isométries sont les homothéties.
- Les seules isométries du plan indirectes (qui ne préservent pas l'orientation) sont les symétries axiales.

## Exercice 4

Calcule le logarithme complexe (la détermination principale) lorsque  $z = \pi$ ,  $z = \pi i$ ,  $z = e^{\pi i}$ ,  $z = -\pi i$  et  $z = i + 1$ .

**Exercice 5**

Ecris les équations dans  $\mathbb{C}$  des similitudes suivantes :

- a) translation par  $3 - 2i$  ;
- b) rotation de centre 0 et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  ;
- c) rotation de centre  $3 - i$  et d'angle  $-\frac{\pi}{4}$  ;
- d) symétrie dont l'axe est la droite des réels ;
- e) symétrie dont l'axe a pour équation  $2x - y + 4 = 0$  ;
- f) homothétie de centre 0 et de rapport 2, puis rotation d'angle  $\pi$  ;
- g) homothétie de centre  $3 - 2i$  et de rapport 3.

**Exercice 6**

Caractériser géométriquement les similitudes  $f$  d'équation :

- a)  $f(z) = -\bar{z}$  ;
- b)  $f(z) = z + 3 - 2i$  ;
- c)  $f(z) = i\bar{z} + 3$  ;
- d)  $f(z) = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot z$  ;
- e)  $f(z) = (1 + i)z + 1 - i$  ;
- f)  $f(z) = (1 + \sqrt{3}i)\bar{z} + \sqrt{3} - 1$ .

**Exercice 7**

On donne les six points  $A = (-2; -3)$ ,  $B = (2; -1)$ ,  $C = (4; 1)$ ,  $A' = (0; 3)$ ,  $B' = (7; 4)$  et  $C' = (11; 6)$  formant deux triangles  $\Delta ABC$  et  $\Delta A'B'C'$  semblables. Détermine l'équation de la similitude envoyant le triangle  $\Delta ABC$  sur le triangle  $\Delta A'B'C'$  et caractérise-la géométriquement.

**Exercice 8**

Montre que toute homothétie du plan est de la forme  $z \mapsto R(z - c) + c$ , où  $R$  est un nombre réel non nul et  $c$  est un nombre complexe arbitraire.

**Exercice 9**

Décris l'image par la détermination principale du logarithme complexe du cercle de rayon  $r > 0$  centré en l'origine (et privé du point  $-r$ ).