

Série 9

Pour le 8 novembre 2023

Exercice 1

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{x - \sin x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$;

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$;

Indication. Tu peux appliquer la règle de Bernoulli-L'Hospital plusieurs fois.

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$.

Exercice 2

Effectue l'étude des fonctions réelles suivantes :

a) $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$;

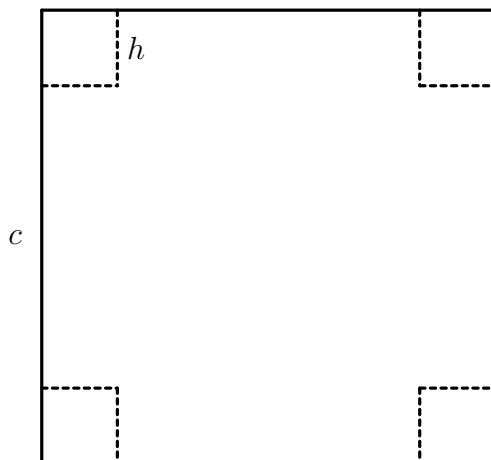
b) $f(x) = \frac{x^2 - x + 5}{x}$;

c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$.

Exercice 3

On fabrique une boîte sans couvercle avec une plaque de carton carrée de côté c (en découpant dans chaque coin un carré de côté h , la hauteur de la boîte, puis en repliant les côtés). Comment obtenir une boîte de volume maximal ?



Indication. Ecris une fonction $f(h)$ qui donne le volume de la boîte en fonction de h . Détermine son domaine de définition et trouve son maximum !

Exercice 4

Trouve les points de la courbe $y = x^2 - 9$ dont la distance à l'origine est minimale. Quelle est cette distance ?

Indication. Ecris une fonction $f(x)$ qui donne la distance à l'origine.

Exercice 5

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

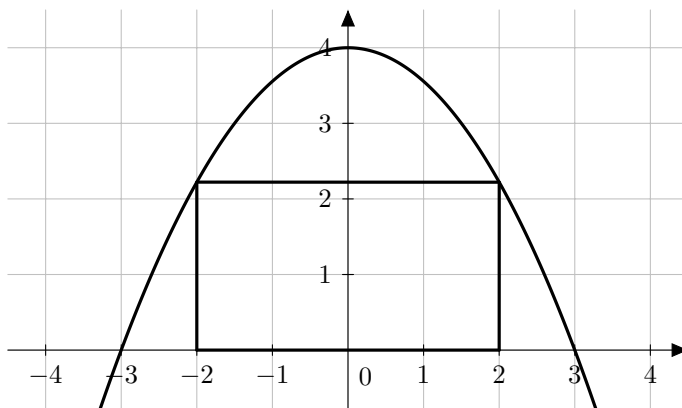
- La fonction $\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$ est constante.
- La fonction $\frac{\sin x}{x}$ tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini.
- La fonction $\frac{\cos x - 1}{x}$ tend vers zéro lorsque x tend vers zéro.
- Les seules fonctions convexes et concaves sont les fonctions constantes.

Exercices théoriques**Exercice 6**

Soient $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Montre que $f + g$ est encore convexe. Qu'en est-il de $f \cdot g$?

Exercice 7

On considère une parabole de sommet $(0; 4)$ et passant par le point $(3; 0)$. Détermine l'équation de cette parabole. On inscrit ensuite un rectangle posé sur l'axe horizontal comme ci-dessous :



Détermine les dimensions du rectangle d'aire maximale.