

# Série 8

Pour le 1er novembre 2023

## Exercice 1

Calcule les dérivées des fonctions suivantes :

a)  $f(x) = (2x^2 + 3x - 5)^3$

b)  $g(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 4}$

c)  $h(x) = \left(\frac{x-1}{3x+2}\right)^2$

d)  $l(x) = \frac{(2x-1)^3}{(5x+1)^4}$

e)  $m(x) = 3\sqrt{2 \sin x \cos x}$

f)  $u(x) = (1-x)(x-3)^4$

g)  $v(x) = (x+x^2)^{-5}$

h)  $w(x) = \frac{(3x+1)^2}{(x+2)^3}$

## Exercice 2

On considère la fonction  $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ .

a) Détermine son domaine de définition.

b) Montre que l'on peut prolonger  $f$  par continuité sur tout  $\mathbb{R}$ .

c) Calcule la dérivée  $f'(x)$  pour  $x \neq 0$ .

d) Calcule  $f'(0)$ .

e) Montre que la dérivée n'est pas continue en zéro.

**Exercice 3**

On considère la fonction  $f : [-1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $f(x) = (x - 2)\sqrt[3]{x^2}$ . Trouve les extrema locaux de cette fonction. Commence par trouver tous les candidats possibles, puis essaie de tracer une esquisse du graphe de  $f$ .

**Exercice 4**

Soit  $a \in \mathbb{R}$  un nombre. On considère la famille de paraboles d'équation  $ax^2 + 5x - 7$ . Montre qu'elles sont *toutes* tangentes entre elles. En quel point ?

**Exercice 5**

**Vrai ou faux ?** Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- Une fonction dont la dérivée est négative est décroissante.
- Si une fonction admet un point où la dérivée n'existe pas, alors ce point est un extremum local.
- Les seules fonctions  $f$  dont la dérivée est  $x + 1$  sont de la forme  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + c$ , où  $c$  est une constante.
- Les seules fonctions  $f$  dont la dérivée est  $\sin x$  sont de la forme  $f(x) = \cos x + c$ , où  $c$  est une constante.
- Si une fonction dérivable est croissante pour  $x < 0$  et décroissante pour  $x > 0$ , alors  $f'(0) = 0$ .

**Exercice 6**

Calcule les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{\tan x}$  ;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x^2 + 3x}$  ;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 - x}$  ;

**Indication.** Pose  $h = \frac{1}{x}$  et transforme la limite ci-dessus en une limite lorsque  $h$  tend vers zéro.

**Exercice 7**

- a) Montre que la fonction  $g(x) = x - \tan x$  est strictement décroissante entre 0 et  $\pi/2$ .
- b) Montre que la fonction  $\frac{\sin x}{x}$  est strictement décroissante entre 0 et  $\pi/2$ .
- c) Dédus de la partie précédente que si  $0 < a < b < \pi/2$ , alors  $\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b}$ .
- d) Dédus aussi que si  $0 < a < b < \pi/2$ , alors  $\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi a}{2b}$ .

**Indication.** Montre que  $\frac{b}{\sin b} < \frac{\pi}{2}$  et utilise le fait que  $0 < \sin a < a$ .

**Exercices théoriques****Exercice 8**

**Le Théorème des accroissements finis.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle continue définie sur un intervalle fermé et dérivable en tout point de  $]a, b[$ . Montre qu'il existe alors un point  $a < c < b$  tel que  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ .

**Indication.** On pose  $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ . Montre que  $g(x)$  satisfait à toutes les hypothèses nécessaires pour pouvoir appliquer le Théorème de Rolle.

**Exercice 9**

Démontre que tout polynôme  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines réelles.

**Indication.** Utilise le théorème de Rolle pour montrer d'abord que si une fonction réelle  $f$  s'annule  $k + 1$  fois, alors la dérivée  $f'$  s'annule au moins  $k$  fois, puis fais un raisonnement par l'absurde.

**Exercice 10**

Soit  $n$  un entier naturel *pair* et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Montre que la fonction  $f(x) = x^n + ax + b$  s'annule au plus en deux points (étudie la dérivée et applique le Théorème de Rolle!).