

# Série 7

Pour le 11 octobre 2023

## Exercice 1

Calcule, à l'aide de la définition, la dérivée des fonctions  $f(x) = x$  et  $g(x) = x^3$ . Plus généralement, calcule la dérivée de la fonction  $h(x) = x^n$  pour tout entier  $n \geq 0$ . Tu peux effectuer une récurrence sur  $n$  et utiliser la formule de multiplication que tu démontreras dans les exercices théoriques.

## Exercice 2

Calcule à l'aide de la définition la dérivée de la fonction  $f(x) = \cos x$ . Calcule ensuite la dérivée des fonctions  $g(x) = \tan x$  et  $h(x) = \cot x$ . Tu peux utiliser pour cela la formule de la dérivée d'un quotient. Indique dans chaque cas le domaine de définition de la fonction et de sa dérivée.

## Exercice 3

**Vrai ou faux ?** Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

- Si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable qui atteint son minimum en un point  $0 \leq u \leq 1$ , alors la dérivée en ce point est nulle.
- Si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable qui atteint son minimum en un point  $0 \leq u \leq 1$ , alors la dérivée en ce point n'est jamais nulle.
- Si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue qui atteint son minimum en un point  $0 \leq u \leq 1$ , alors la dérivée en ce point existe.
- Soit  $d$  une droite du plan non verticale passant par le point  $(0, 0)$ . Il existe une fonction réelle  $f$  avec  $f(0) = 0$  telle que la tangente au graphe de cette fonction au point  $(0, 0)$  est  $d$ .
- Même question si la droite est verticale.
- Une fonction continue est dérivable. Facultatif : Une fonction dérivable est continue.

**Exercice 4**

Calcule avec ta méthode favorite la dérivée des fonctions suivantes :

a)  $f(x) = 10x - 23$  et  $g(x) = x^9 + x^8 + x + 1$  ;

b)  $f(t) = \frac{1}{t}$  et  $g(t) = \frac{2}{t^2}$  ;

c)  $f(y) = \sqrt{y}$  et  $g(y) = \sqrt[3]{y}$  ;

d)  $f(u) = (u + 5)^2$  et  $g(u) = (u + 5)^2(u - 3)$  ;

e)  $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 5}$  et  $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ .

f)  $f(x) = 2x^3 + \frac{5}{x^7}$  et  $g(x) = \frac{x^3 - 2x}{2 - x^2}$

**Exercice 5**

Construis une fonction dont la dérivée est  $x$ . Construis ensuite une fonction dont la dérivée est  $|x|$ . On conclut de cet exemple qu'une fonction peut être dérivable en un point sans pour autant que la fonction dérivée le soit.

**Exercice 6**

Calcule dans chacun des cas suivants l'angle entre les deux courbes données en leurs points d'intersection. Utilise ta machine à calculer si nécessaire !

a)  $y = x^2$  et  $y = x^3$  ;

b)  $y = x^2 - 2x$  et  $y = \frac{1}{2}x$  ;

c)  $y = \sin x$  et  $y = \cos x$ .

Note : L'angle entre deux courbes est l'angle aigu des tangentes aux courbes en leur point d'intersection.

Rappel : L'angle  $\alpha$  entre deux droites  $y = m_1x + h_1$  et  $y = m_2x + h_2$  est donné par

$$\tan(\alpha) = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|.$$

**Exercice 7**

Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  la courbe d'équation  $y = x^3 + ax^2 + bx$  admet-elle une tangente horizontale au point  $(1; 1)$  ?

**Exercice 8**

On considère la fonction  $f(x) = \frac{x^2 + (m - 2)x - 10}{x^2 - 2x - 3}$ . Détermine la valeur du paramètre  $m$  pour que la tangente à la courbe au point où elle coupe l'axe  $Oy$  soit parallèle à la droite d'équation  $20x + 9y = 0$ .

**Exercices théoriques****Exercice 9**

Démontre la formule de la dérivée d'un produit de fonctions dérivables.

**Exercice 10**

Soit  $f$  une fonction réelle dérivable. Démontre les affirmations suivantes :

- a) Si  $f$  est paire, alors la dérivée  $f'$  est impaire.
- b) Si  $f$  est impaire, alors la dérivée  $f'$  est paire.
- c) Si  $f$  est périodique, alors  $f'$  aussi est périodique.