I. Continuité

Nous revenons à l'étude générale des fonctions réelles avec la notion de continuité. Comment dire en termes mathématiques que l'on peut “dessiner le graphe d'une fonction sans lever le crayon” ? Nous verrons une définition faisant intervenir des ϵ et des δ, puis nous analyserons le cas des fonctions connues : polynomiales, rationnelles, trigonométriques, exponentielles et logarithmes.

1 Rappels

Pour définir la limite d'une suite de nombres réels (x_n), vous avez dû modéliser la notion d'*arbitrairement proche* en introduisant un nombre ε réel et positif. Un nombre x est alors la limite de la suite si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre entier N tel que $|x - x_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. En d'autres termes, la différence entre les termes de la suite et la limite s'amenuise à mesure que l'on avance dans la suite.

Exemple 1.1. Calculons la limite de la suite $x_n = \dfrac{\cos\left(\sqrt[3]{n+1}\right)}{\sqrt[4]{n^3+1}}$.
Avant de commencer à faire des calculs, remarquons que cette expression est définie $\forall n \in \mathbb{N}$.
D'autre part, le cosinus d'un nombre réel est toujours compris entre -1 et 1, si bien que

$$|x_n| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}.$$

Cette fraction tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Formalisons-le avec des epsilons.
Soit $\varepsilon > 0$. On veut n tel que

$$\cdot\ \frac{\sqrt[4]{n^3+1}}{\varepsilon}$$

$$|x_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} < \varepsilon \underset{\text{puis } (\ )^4}{\iff} \frac{1}{\varepsilon^4} < n^3 + 1 \iff n > \sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon^4} - 1}$$

En posant $N = \left\lfloor \sqrt[3]{\varepsilon^{-4} - 1} + 1 \right\rfloor$, on a bien $\forall n \geq N$

$$n^3 + 1 \geq N^3 + 1 > \frac{1}{\varepsilon^4} \Rightarrow \varepsilon^4 > \frac{1}{n^3+1} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} \geq |x_n| = |x_n - 0|$$

Vous avez développé des méthodes qui permettent d'éviter l'usage de la définition et nous les rencontrerons à nouveau dans ce chapitre.

2 Fonctions continues

Nous étudions le graphe d'une fonction réelle $f : D \to \mathbb{R}$ avec D inclus dans $\mathbb{R}$ et nous nous trouvons par conséquent dans le plan $\mathbb{R}^2$. Pour approcher un point du plan, il faut modéliser la notion d'arbitrairement proche à l'aide de deux nombres ε et δ, arbitrairement petits, qui décrivent ce qui se passe sur chacun des deux axes.

Définition 2.1.
Une fonction réelle f est *continue en un point* a de son domaine de définition si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Si f n'est pas continue en a, on dit qu'elle est *discontinue* en ce point.
On dit que f est *continue* si elle est continue en tout point de son domaine de définition.

Remarque 2.2. La définition de la limite d'une fonction permet de traduire cette définition de la façon suivante : f est continue au point a s'il existe un intervalle $]a-u, a+u[$ sur lequel f est définie et que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \geq \delta > 0$ tel que

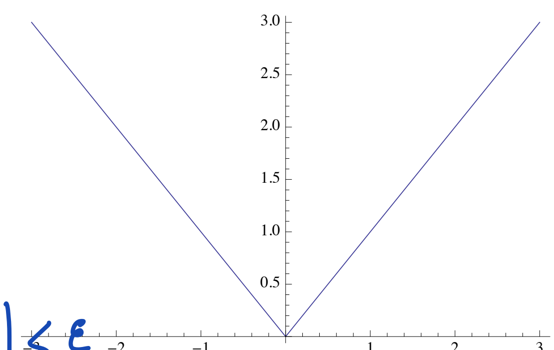
$$0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

En d'autres termes, les valeurs $f(x)$ sont aussi proches qu'on veut de $f(a)$ si x est suffisamment proche de a.

Exemple 2.3. Considérons la fonction $f(x) = |x|$. Est-elle continue en zéro ?
Remarquons d'abord que $ED(f) = \mathbb{R}$, si bien que le nombre u ci-dessus n'a pas d'importance.

$f(0) = 0$

La valeur de la fonction en 0 est 0, si bien que nous devons montrer que $|x|$ s'approche de zéro à mesure que x s'approche de zéro.
C'est bien le cas et nous le formalisons avec des ε et des δ.



Pour tout $\varepsilon > 0$, choisissons $\delta_\varepsilon = \varepsilon$

On veut $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$

On $|f(x) - f(0)| = ||x| - 0| = |x|$

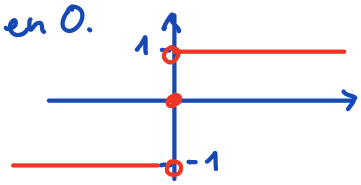
On veut donc $|x| < \delta \Rightarrow |x| < \varepsilon$. Ainsi $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ convient.

$\Rightarrow$ f est continue en 0.

Exemple 2.4. Nous montrerons que les fonctions réelles de type polynoméal, rationnel, trigonométhique, exponentiel et log sont continues sur leur domaine de définition.

La fonction *sign* : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est discontinue en 0.

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



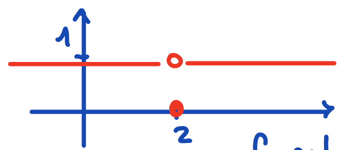
$\lim_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas !

Or $0 \in ED(\text{sign})$

La fonction *sign* : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est continue.

car $0 \notin \mathbb{R}^*$

- $$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$



$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 1 = 1$

$\neq f(2)$

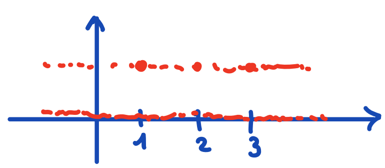
f est discontinue en $x = 2$.

Remarque 2.5. Nous avons vu que la définition de limite d'une fonction peut s'exprimer en termes de suites. Par conséquent, une fonction f est continue en a si et seulement si l'image par f de toute suite qui converge vers a est une suite qui converge vers $f(a)$.

Plutôt qu'un critère qui permet de démontrer qu'une fonction est continue, cette caractérisation permet parfois de montrer qu'une fonction est discontinue en un point.

Exemple 2.6. Considérons la célèbre fonction de Dirichlet définie comme suit :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$



f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Par exemple en $a = 0$, $f(0) = 1$. Mais pour $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ t.q. $x_n = \frac{\sqrt{2}}{n} \notin \mathbb{Q}$,

on a $x_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ et $f(x_n) = 0 \ \forall n$, donc $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0 \neq f(0) = 1$.

Les résultats que nous connaissons sur les limites de fonctions nous donnent immédiatement les résultats suivants sur la continuité

Proposition 2.7. *Soient f et g deux fonctions réelles continues en a. Alors*

1. *La somme $f + g$ est continue en a.*
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le produit $\alpha \cdot f$ est continu en a.*
3. *Le produit $f \cdot g$ est continu en a.*
4. *Si $g(a) \neq 0$, le quotient f/g est continu en a.*

$f(x) = x$

Exemple 2.8. Toute fonction polynomiale est continue. De même, toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition. En effet, la fonction identité est continue (voir exercices).

Par la propriété 3, $x^2, x^3, \dots, x^n$ sont continues.

Par la propriété 2, αx^n est continue.

Par la propriété 1, toute fonction polynômiale est continue : $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

Par la propriété 4, toute fonction rationnelle est continue sur son ED.

Proposition 2.9. *Soient f une fonction réelle continue en a et g une fonction réelle continue en $f(a)$. On suppose que l'image de f est contenue dans $D(g)$. Alors $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration. C'est à nouveau ce que nous savons sur les limites qui nous permet de conclure. Comme $\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a))$, la composition $g \circ f$ est continue en a. □

Un concept important pour les fonctions est le prolongement par continuité.
Supposons que nous étudions une fonction définie en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, par exemple $f(x) = \dfrac{x}{x}$.
Existe-t-il une *autre fonction* g définie sur tout $\mathbb{R}$ et continue, qui coïncide avec f sur $D(f)$?
Dans ce cas la réponse est claire : on pose $g(0) = 1$ puisque $f(x) = 1$ pour tout $x \neq 0$.
Mais il est souvent plus difficile de savoir si l'on peut, ou non, prolonger une fonction par continuité.

Définition 2.10. Soit f une fonction définie au voisinage de a, mais qui n'est pas définie en a. On suppose de plus que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe. Alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} g \;:\; D(f) \cup \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D(f) \\ \lim_{x \to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

est le *prolongement par continuité* de f en a.
(PPC)

Remarque 2.11.
Le prolongement par continuité de f en a est par construction une fonction continue en a.

Exemple 2.12. Considérons la fonction $f(x) = x \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie dans $\mathbb{R}^*$.

Calculons $\lim_{x \to 0} f(x)$. Comme $\cos(\alpha) \in [-1, 1]$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a

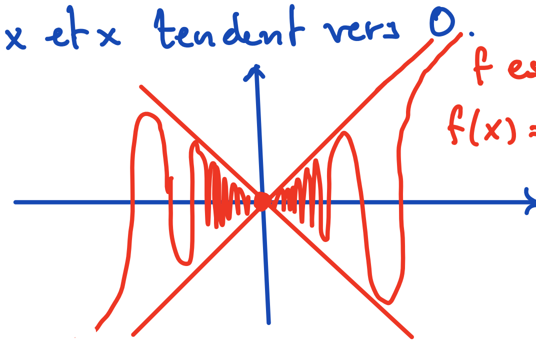
$$-x \leq x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x .$$

Lorsque $x \to 0$, nos deux gendarmes $-x$ et x tendent vers 0.

Donc $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

f est impaire
$f(x) = -f(-x)$

PPC : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



$\lim_{x \to \infty} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} x$

3 Le Théorème de la valeur intermédiaire

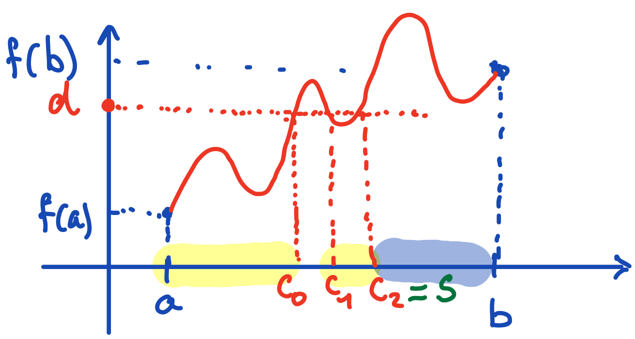
Passons maintenant à l'étude du comportement des fonctions continues sur un intervalle fermé.

Définition 3.1. Une fonction réelle $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *continue sur* $[a, b]$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$ et si elle est *continue à droite* en a et *continue à gauche* en b ; on demande donc qu'aux bornes de l'intervalle, on ait $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Exemple 3.2. La fonction $f(x) = \sqrt{1-x}$ est continue sur $[0, 1]$. En effet, $g(x) = 1-x$ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynômiale. La fonction racine est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, f est une composition de fonctions continues qui est donc continue sur $[0, 1[$.
Il reste à regarder ce qui se passe en 1. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} = 0 = f(1)$, c'est gagné !

Théorème 3.3 (de la valeur intermédiaire). *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ avec $f(a) < f(b)$. Si d est tel que $f(a) < d < f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = d$.*
Un résultat similaire est obtenu si $f(a) > f(b)$: dans ce cas, si d est tel que $f(a) > d > f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = d$.

Ici $f(c_0) = f(c_1) = f(c_2) = d$



Démonstration. Considérons le sous-ensemble

$$S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < d\}$$

Cet ensemble est non vide, puisqu'il contient a, et est majoré par b. Comme $\mathbb{R}$ est complet, la borne supérieure s de S existe. On sait aussi que s est le plus petit majorant de S. Comme f est continue en s, on a $\lim\limits_{x\to s} f(x) = f(s)$. En particulier, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans S avec $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(s)$; comme $f(x_n) < d$ est toujours vrai, on a $f(s) \leq d$ puisque d est un majorant de l'ensemble $\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Considérons maintenant

$$T = \{x \in [a, b] \mid x > s\}$$

Les éléments de T ne sont donc pas contenus dans S, si bien que $f(x) \geq d$ pour tout $x \in T$. Donc $f(s) = \lim\limits_{x\to s} f(x) = \lim\limits_{x\to s^+} f(x) \geq d$. Nous avons montré que $f(s) \leq d$ et $f(s) \geq d$, donc $f(s) = d$. □

f continue

$x \in T$

4 Fonctions réciproques, trigonométriques et exponentielles

Nous avons établi que les fonctions polynomiales et rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition. Nous allons voir maintenant que toutes les fonctions trigonométriques sont continues et parlerons ensuite de la continuité des fonctions réciproques afin de traiter le cas des fonctions trigonométriques réciproques et logarithmes.

Proposition 4.1. *Les fonctions* sin *et* cos *sont continues.*

Démonstration. cos est continue (voir série). Par suite, comme $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$,
$\sin(x)$ est donc la composition de $g(x) = \frac{\pi}{2} - x$ et $h(x) = \cos(x)$ toutes deux continues. Donc $\sin(x)$ est continue. □

Corollaire 4.2. *Les fonctions* tan *et* cot *sont continues sur leur domaine de définition.*

Démonstration. $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sont des quotients de fonctions continues, donc $\tan(x)$ et $\cot(x)$ sont continues. (Prop. 2.7, 4)) □

Exemple 4.3. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \sin\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\right)$.

$D(f) =]1\,;+\infty[$. Cette fonction est continue sur son domaine de définition car f est une composition de fonctions continues sur $D(f)$!

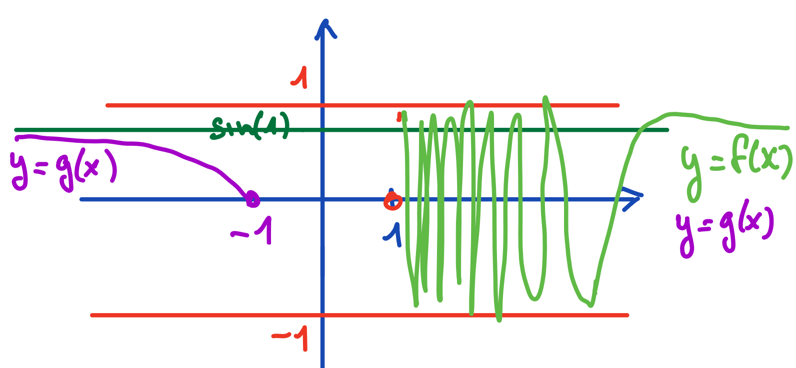
Etudions son comportement dans les bords de son ensemble de définition.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ n'existe pas car $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

$\Rightarrow$ f oscille de plus en plus vite dans $[-1\,;1]$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sin(1) \Rightarrow$ AH : $y = \sin(1)$

Esquisse du graphe :



__Remarque__ :

$g(x) = \sin\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$

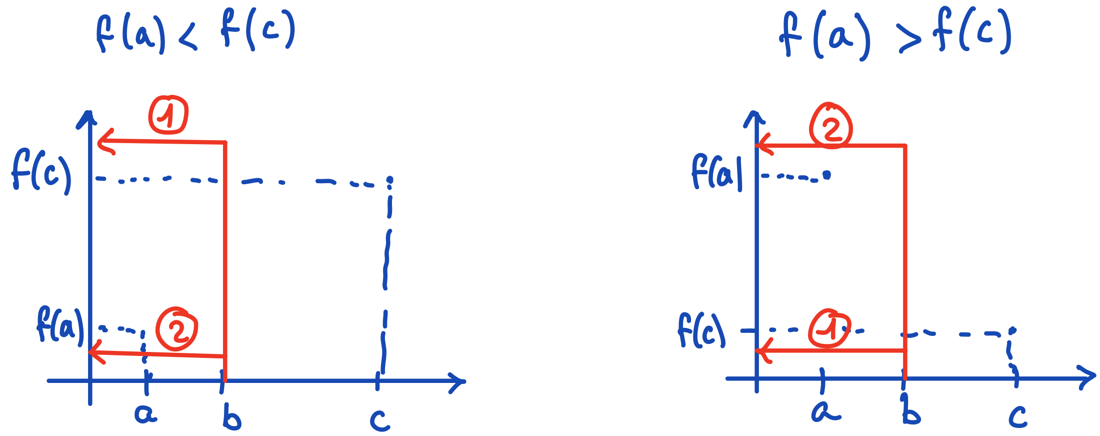
$D(g) =]-\infty\,;-1] \cup D(f)$.

$g(-1) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \sin(1)$

Proposition 4.4. *Toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ qui est injective et continue est strictement monotone.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que f n'est pas monotone. Il existe donc trois points $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, mais avec $f(b)$ qui n'est pas strictement compris entre $f(a)$ et $f(c)$.
Il y a alors deux cas :



1. $f(c)$ est strictement compris entre $f(b)$ et $f(a)$
2. $f(a)$ est strictement compris entre $f(b)$ et $f(c)$

Supposons que nous sommes dans le cas 1 (le cas 2 similaire)

. $f(c)$ est compris entre $f(b)$ et $f(a)$ $\Rightarrow$

soit $f(b) < f(c) < f(a)$, soit $f(a) < f(c) < f(b)$.

Posons $f(c) = d$.

Par le Thm 3.3. de la valeur intermédiaire,

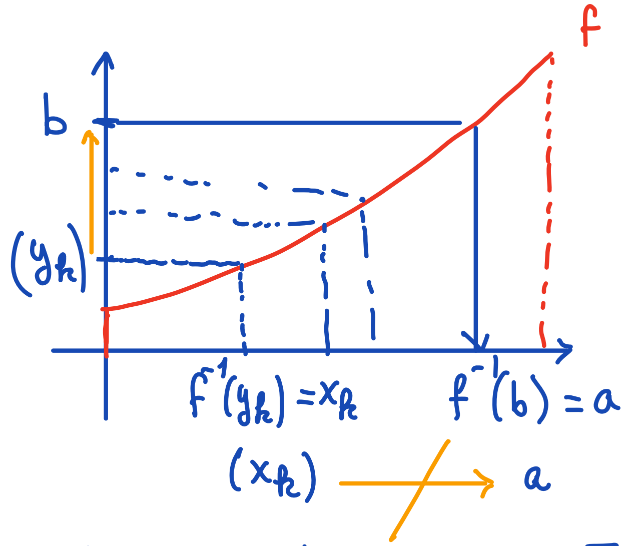
$\exists\ c' \in]a;b[$ t.q $f(c') = d = f(c)$.

Contradiction avec l'injectivité de f. En effet,

$c \neq c'$ car $c > b$ et $c' \in]a;b[$, don $c' < b$. $\square$

Théorème 4.5. *Soit f une fonction réelle bijective et continue. Alors la fonction réciproque f^{-1} est aussi continue.*

Démonstration. Nous allons supposer par l'absurde que la fonction réciproque n'est pas continue, donc qu'il existe une suite (y_n) qui converge, disons vers $b \in D(f^{-1})$, mais telle que son image $(f^{-1}(y_n))$ ne converge pas vers $f^{-1}(b)$.
Comme f^{-1} est la réciproque de f, on peut définir une suite (x_n) et un nombre $a \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_n) = y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f(a) = b$ en posant simplement $x_n = f^{-1}(y_n)$ et $a = f^{-1}(b)$.



On doit nier $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n \geq N, \ |x_n - a| < \varepsilon$

Négation : $\exists \varepsilon > 0$ t.q $\forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n \geq N, \ |x_n - a| \geq \varepsilon$.

On suppose la négation par l'absurde !

Puisque (x_n) ne converge pas vers a, par définition de la convergence, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq N$ mais $|x_k - a| \geq \varepsilon$. Par conséquent,

$$\text{soit } x_k \geq a + \varepsilon, \quad \text{soit } x_k \leq a - \varepsilon.$$

Par la proposition précédente nous savons que f est strictement monotone, supposons monotone croissante, le cas décroissant étant similaire, si bien que pour tous les $k \in \mathbb{N}$ ci-dessus, on a

$$\text{soit} \quad y_k = f(x_k) \geq f(a + \varepsilon) = f(a) + \delta = b + \delta, \quad \text{soit} \quad y_k = f(x_k) \leq f(a - \varepsilon) = b - \delta'.$$

où $\delta = f(a + \varepsilon) - f(a) > 0$ et $\delta' = f(a) - f(a - \varepsilon) > 0$.
Dans les deux cas, cela contredit le fait que la suite (y_n) converge vers b. $\square$

Exemple 4.6. Toutes les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

$$\arccos : [-1;1] \to [0;\pi] \qquad \arcsin : [-1;1] \to [-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}]$$
$$\arctan :]-\infty;\infty[\to]-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}[\qquad \mathrm{arccot} :]-\infty;\infty[\to]0;\pi[$$

sont continues.

Pour terminer nous aimerions appliquer ce résultat à la réciproque de la fonction exponentielle, c'est-à-dire au logarithme. Il nous faut pour cela établir la continuité de $\exp_a$.

Proposition 4.7. *La fonction* $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *est continue pour tout* $a > 0$.

Démonstration. Nous avons défini la fonction $\exp_a$ en prolongeant par continuité l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & a^x \end{array}$$

La fonction $\exp_a$ est donc continue par construction.

□

Corollaire 4.8. *Soit* $a > 0$ *et* $a \neq 1$. *Alors la fonction* $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *est continue.*

Démonstration. $\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ qui est continue.

□