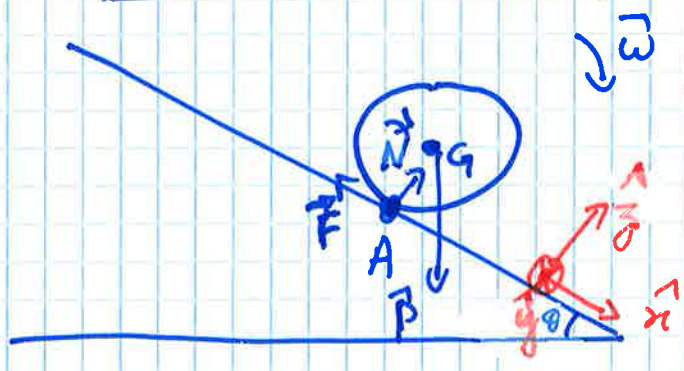


# VI - Roulement sans glissement

Comme première application, nous allons étudier des exemples de roulement sans glissement.

Cylindre sur plan incliné.



Rayon  $R$ , masse  $M$ , moment d'inertie par rapport à l'axe

$$G \hat{y} : I = k M R^2$$

avec  $k = \frac{1}{2}$  (cylindre plein) ou  $k = 1$  (anneau).

Questions: Condition de roulement sans glissement? Vitesse à l'arrivée après une descente de  $h$ ?

Réponse: Posons  $\vec{\omega} = \omega \hat{y}$ .

Le mouvement est complètement déterminé si on connaît  $\vec{v}_G(t)$  et  $\vec{\omega}(t)$ .

Or,

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AG}$$

Si il y a roulement sans glissement,

$$\vec{v}_A = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_G = \omega \hat{y} \wedge R \hat{z} = \omega R \hat{x}$$

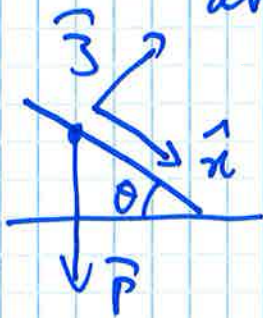
Le mouvement est donc totalement déterminé

par  $\omega(t)$ .

Comment trouver  $\omega(t)$ ? Le plus simple est d'appliquer un théorème qui ne fait pas intervenir de forces inconnues. Or, les forces  $\vec{R}$  et  $\vec{F}$  s'appliquent en A. Le plus simple est d'appliquer le théorème du moment cinétique en A, comme  $\vec{v}_A = \vec{0}$ , il prend la forme

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{\text{ext}} = \vec{AG}_1 \wedge \vec{P}$$

$$= R \hat{y}_1 \wedge \vec{P}$$



$$(\vec{P}, \hat{n}) = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \cos(\vec{P}, \hat{n}) = \sin \theta$$

$$(\vec{P}, \hat{z}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \cos(\vec{P}, \hat{z}) = -\cos \theta$$

$$\Rightarrow \vec{M}_A^{\text{ext}} = R \hat{z}_1 \wedge Mg (\sin \theta \hat{n} - \cos \theta \hat{z})$$

$$= MRg \sin \theta \hat{y}$$

$$\text{Or, } \vec{L}_A \cdot \hat{y} = \vec{L}_A \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega} = I_{\Delta A} \omega$$

$$\Rightarrow I_{\Delta A} \dot{\omega} = MRg \sin \theta$$

D'après le théorème de Huyghens-Steiner,

$$I_{\Delta A} = I + MR^2 = (k+1)MR^2$$

$$\Rightarrow \dot{\omega} = \frac{MRg \sin \theta}{(k+1)MR^2}$$

soit  $\dot{\omega} = \frac{g}{(k+1)R} \sin \theta$

A partir de là, on peut tout calculer.

$$\vec{v}_G = \omega R \vec{n} \Rightarrow \vec{a}_G = \dot{\omega} R \vec{n} = \frac{g \sin \theta}{k+1} \vec{n}$$

Le principe fondamental s'écrit

$$M \vec{a}_G = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$$

Proj. au  $\vec{n}$ :  $M \vec{a}_G \cdot \vec{n} = \vec{P} \cdot \vec{n} + \vec{N} \cdot \vec{n} + \vec{F} \cdot \vec{n}$

$$\Rightarrow \frac{Mg \sin \theta}{k+1} = Mg \sin \theta - F$$

$$\Rightarrow F = Mg \sin \theta \left( 1 - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{F = Mg \sin \theta \frac{k}{k+1}}$$

Proj. au  $\vec{z}$ :  $0 = \vec{P} \cdot \vec{z} + N \Rightarrow 0 = -Mg \cos \theta + N$

$$\Rightarrow \boxed{N = Mg \cos \theta}$$

• Condition de roulement sans glissement

Il faut que  $F \leq \mu_s N$

$$\Rightarrow Mg \sin \theta \frac{k}{k+1} \leq \mu_s Mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow \tan \theta \leq \mu_s \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$$

soit  $\tan \theta \leq \mu_s \times 2$  (anneau)

ou  $\tan \theta \leq \mu_s \times 3$  (cyl. plein)

Cette condition est moins stricte que celle d'un solide qui glisse (voir chapitre 4,  $\tan \theta \leq \mu_s$ ).

• Vitesse à l'arrivée:

$$\text{A } t=0, \omega = 0, \vec{v}_G = \vec{0}, \pi_G = 0$$

$$\dot{\omega} = \frac{g}{(k+1)R} \sin \theta \Rightarrow \omega = \frac{g}{(k+1)R} \sin \theta t$$

$$\Rightarrow \dot{\pi}_G = R\omega = \frac{g}{(k+1)} \sin \theta t$$

$$\Rightarrow \pi_G = \frac{1}{2} \frac{g}{(k+1)} \sin \theta t^2$$

$$\text{A l'arrivée, } \pi_G = \frac{h}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{g}{(k+1)} \sin \theta t^2 = \frac{h}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{2(k+1)h}{g} \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(k+1)h}{g}} \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\pi}_G = \frac{g}{(k+1)} \sin \theta \sqrt{\frac{2(k+1)h}{g}} \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\pi}_G = \sqrt{\frac{2gh}{k+1}}$$

Donc,  $v_G = \sqrt{\frac{2gh}{k+1}}$  soit

$$v_G = \sqrt{gh} \quad (\text{cylindre creux})$$

$$\text{et } v_G = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \quad (\text{cylindre plein})$$

Ces vitesses sont plus petites que pour un glissement sans frottement (voir chapitre 4,  $v = \sqrt{2gh}$ ).

Méthodes alternatives:

\* Théorème du moment cinétique au G:

$$\frac{dL_G}{dt} = \underbrace{\vec{GA} \wedge \vec{N}}_{=0} + \vec{GA} \wedge \vec{F} = -R\vec{z} \wedge (-F\vec{x}) = RF\vec{y}$$

avec  $\vec{L}_G = I\vec{\omega}$

car l'axe  $(Gy)$  est un axe principal d'inertie

$$\Rightarrow I\dot{\omega} = RF$$

Combinées avec les autres équations tirées du principe fondamental  $M\vec{a}_G = \vec{F}_{ext}$ , on retrouve bien sûr la même solution.

\* Théorème de l'énergie mécanique:

La force de frottement ne travaille pas

car  $\vec{v}_A = \vec{0}$ . Au cours, l'énergie mécanique est conservée.

d'énergie cinétique est donnée par:

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} k M R^2 \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} (k+1) M R^2 \omega^2$$

(on peut aussi la calculer comme

$$K = \frac{1}{2} I_{\Delta A} \omega^2 = \frac{1}{2} (k+1) M R^2 \omega^2).$$

Au départ,  $K=0$  et  $U = M g h$

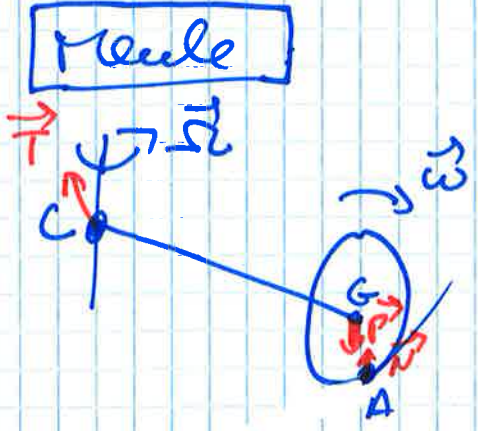
A l'arrivée,  $K = \frac{1}{2} (k+1) M R^2 \omega^2$  et  $U=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (k+1) M R^2 \omega^2 = M g h$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2 g h}{(k+1) R^2}$$

$$\Rightarrow v_G = \omega R = \sqrt{\frac{2 g h}{k+1}}$$

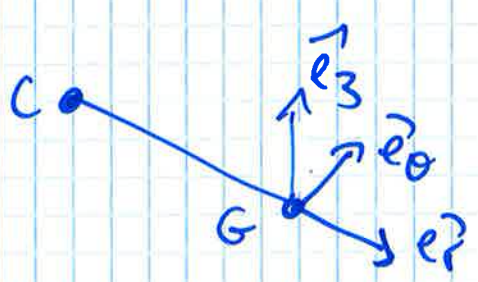
Remarque: Comme pour un solide qui glisse, les frottements ralentissent le système et diminuent la vitesse finale, mais cette fois les frottements ne travaillent pas. Ils transfèrent une partie de l'énergie cinétique de translation en énergie cinétique de rotation.



Disque qui roule sans glisser. Rayon R, masse m, tige de longueur d = GC, horizontale, de masse négligeable.  $\vec{\Omega}$  fixé.

Question: Calculer la force de réaction  $\vec{N}$  du sol sur la meule.

Réponse: On choisit le repère  $(C, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$



$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_3$$

$$\vec{\omega} = -\omega \vec{e}_1$$

① Relation entre  $\Omega$  et  $\omega$

$$\vec{v}_C = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_G = (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{CG}$$

$$= (-\omega \vec{e}_1 + \Omega \vec{e}_3) \wedge d \vec{e}_1 = \Omega d \vec{e}_2$$

$$\vec{v}_A = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_G = (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{AG}$$

$$= (\omega \vec{e}_1 + \Omega \vec{e}_3) \wedge R \vec{e}_3 = R \omega \vec{e}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega d = R \omega}$$

② Théorème du moment cinétique

On suppose que l'interaction entre la tige et l'axe vertical se résume à une

force  $\vec{T}$  appliquée en C (donc qu'il n'y a pas de couple de frottement), et on néglige la force de frottement  $\vec{F}$  de la meule sur le sol.

Pour se débarrasser de  $\vec{T}$ , on va appliquer le théorème du moment cinétique en C:

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{\Gamma}_C^{ext}$$

a) Calcul de  $\vec{L}_C$ :

$$\vec{L}_C = \vec{L}_G + \vec{CG} \wedge M\vec{V}_G$$

$\vec{L}_G = I_3 \vec{\omega} + I_1 \vec{\Sigma}$  car  $\vec{e}_3$  et  $\vec{\Sigma}$  sont dirigés selon des axes principaux.

$$\begin{cases} I_3 = \frac{1}{2} MR^2 \\ I_1 = \frac{1}{4} MR^2 \end{cases} \text{ (cas particuliers cylindre plein, avec } L=0 \text{)}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_G = \frac{1}{4} MR^2 \Omega \vec{e}_3 - \frac{1}{2} MR^2 \omega \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_C &= \vec{L}_G + \vec{CG} \wedge M\vec{V}_G \\ &= \vec{L}_G + d\vec{e}_r \wedge MR\omega \vec{e}_\theta \\ &= \vec{L}_G + dMR\omega \vec{e}_3 = \vec{L}_G + Md^2\Omega \vec{e}_3 \end{aligned}$$



(196)

d'où 
$$\vec{L}_C = \left( \frac{1}{4} MR^2 + \pi d^2 \right) \Omega \vec{e}_3 - \frac{1}{2} \pi R^2 \omega \vec{e}_r$$

Au cours du mouvement,  $\vec{e}_3$  ne change pas

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{d\vec{L}_C}{dt} &= -\frac{1}{2} \pi R^2 \omega \frac{d\vec{e}_r}{dt} \\ &= -\frac{1}{2} \pi R^2 \omega (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{e}_r \\ &= -\frac{1}{2} \pi R^2 \omega (-\omega \vec{e}_r + \Omega \vec{e}_3) \wedge \vec{e}_r \\ &= -\frac{1}{2} \pi R^2 \omega \Omega \vec{e}_0 \end{aligned}$$

b) Moment des forces:

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_C^{\text{ext}} &= \vec{CG} \wedge M\vec{g} + \vec{CA} \wedge \vec{N} \\ &= d\vec{e}_r \wedge (-Mg)\vec{e}_3 + \vec{CG} \wedge \vec{N} + \underbrace{\vec{CA} \wedge \vec{N}}_{=0} \\ &= d\vec{e}_r \wedge (-Mg\vec{e}_3 + N\vec{e}_3) \\ &= d(Mg - N) \vec{e}_0 \end{aligned}$$

Finallement,

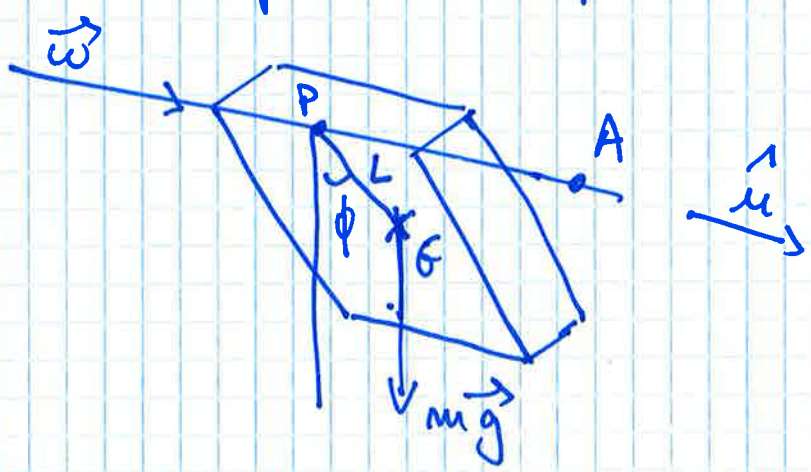
$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \pi R^2 \omega \Omega &= d(Mg - N) \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} \pi R^2 d\Omega^2 &= d(Mg - N) \\ \Rightarrow \boxed{N = Mg + \frac{\pi R^2 \Omega^2}{2}} \end{aligned}$$

Remarques:

- $N > Mg$ : du fait de son mouvement, la meule appuie plus fort sur le sol.
- Si l'on avait pris en compte une force de frottement  $\vec{F} = -F\vec{e}_\theta$ , il serait apparu un moment  $-dF\vec{e}_z + RF\vec{e}_r$ . Ce moment doit être compensé par un couple (c'est-à-dire un moment local) qui s'applique au point C du fait de la liaison. Cette contribution supplémentaire est sans importance puisqu'elle ne change pas le moment suivant  $\vec{e}_\theta$ .

VII - Rotation autour d'un axe fixe

**Pendule physique** On appelle pendule physique tout solide pouvant tourner autour d'un axe fixe. Prenons l'exemple d'un parallélépipède.



Theoreme du moment cinétique: A sur l'axe

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A^{ext}$$

$$\Rightarrow \frac{d(\vec{L}_A \cdot \hat{u})}{dt} = \frac{d\vec{L}_A}{dt} \cdot \hat{u} = \vec{\Gamma}_A^{ext} \cdot \hat{u}$$

$\hat{u}$  indépendant du temps

$$\vec{L}_A \cdot \hat{u} = I_\Delta \omega = I_\Delta \dot{\phi}$$

avec  $I_\Delta = I_{\Delta G} + ML^2$

$$\vec{\Gamma}_A^{ext} \cdot \hat{u} = (\vec{AG} \wedge M\vec{g}) \cdot \hat{u}$$

car les forces exercées au niveau de l'axe ont un moment perpendiculaire à  $\vec{AM}$ , où M est le point d'application, donc à  $\hat{u}$ .

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_A^{ext} \cdot \hat{u} &= (\vec{AP} \wedge M\vec{g}) \cdot \hat{u} + (\vec{PG} \wedge M\vec{g}) \cdot \hat{u} \\ &= 0 \text{ car } \vec{AP} \parallel \hat{u} \\ &= -LMg \sin \phi \end{aligned}$$

finalement,

$$I_\Delta \ddot{\phi} = -LMg \sin \phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} = -\frac{LMg \sin \phi}{I_\Delta}}$$

Remarque: Si toute la masse est concentrée en  $G$  (cas du point matériel),

$$I_{\Delta G} = 0 \text{ et } I_{\Delta} = ML^2$$

$$\rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \phi$$

On retrouve l'équation du pendule.

Méthode alternative:

On aurait pu utiliser le théorème de l'énergie mécanique :

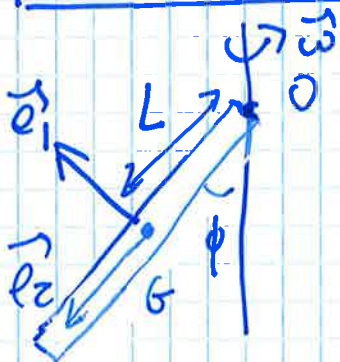
$$K = \frac{1}{2} I_{\Delta} \dot{\phi}^2, \quad V = -mgL \cos \phi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I_{\Delta} \dot{\phi}^2 - mgL \cos \phi = \text{constante}$$

$$\Rightarrow I_{\Delta} \dot{\phi} \ddot{\phi} + mgL \sin \phi \dot{\phi} = 0$$

$$\Rightarrow I_{\Delta} \ddot{\phi} = -mgL \sin \phi.$$

**Pendule tournant**



$\vec{\omega}$  constant. On cherche  $\phi$ .

On appelle  $I_{\perp}$  et  $I_{\parallel}$  les moments d'inertie en  $G$  suivant les axes principaux,

$\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$

$$\Rightarrow L \vec{G} = I_{\perp} \omega_1 \vec{e}_1 + I_{\parallel} \omega_2 \vec{e}_2$$

avec  $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2$

et  $\omega_1 = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_1 = \omega \sin \phi$  et  $\omega_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_2 = -\omega \cos \phi$

$\Rightarrow \vec{L}_G = \omega I_{\perp} \sin \phi \vec{e}_1 - \omega I_{\parallel} \cos \phi \vec{e}_2$

Pour éliminer la force de réaction en O, le plus simple est d'appliquer le théorème du moment cinétique en O.

$\vec{L}_O = \vec{L}_G + \vec{OG} \wedge M \vec{v}_G$

avec  $\vec{v}_G = v_G \vec{e}_3$  et  $v_G = L \omega \sin \phi$

$\Rightarrow \vec{L}_O = \vec{L}_G + ML \vec{e}_2 \wedge L \omega \sin \phi \vec{e}_3$

$= \vec{L}_G + ML^2 \omega \sin \phi \vec{e}_1$

$= (I_{\perp} + ML^2) \omega \sin \phi \vec{e}_1 - I_{\parallel} \omega \cos \phi \vec{e}_2$

Comme  $\omega$  et  $\phi$  sont constants, la seule dépendance en t vient de  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$ :

$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1 = \omega_2 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\omega_2 \vec{e}_3 = \omega \cos \phi \vec{e}_3$

$\frac{d\vec{e}_2}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_2 = \omega_1 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \omega_1 \vec{e}_3 = \sin \phi \omega \vec{e}_3$

$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = (I_{\perp} + ML^2 - I_{\parallel}) \omega^2 \sin \phi \cos \phi \vec{e}_3$

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_0^{\text{ext}} &= \vec{OG} \wedge M\vec{g} \\
 &= L \vec{e}_2 \wedge (-Mg \sin\phi \vec{e}_1 + Mg \cos\phi \vec{e}_2) \\
 &= MgL \sin\phi \vec{e}_3
 \end{aligned}$$

d'où

$$(\bar{I}_\perp - \bar{I}_\parallel + ML^2) \omega^2 \sin\phi \cos\phi = MgL \sin\phi$$

$$\Rightarrow \cos\phi = \frac{MgL}{\omega^2 (\bar{I}_\perp - \bar{I}_\parallel + ML^2)}$$

ou encore

$$\cos\phi = \frac{g}{\omega^2 L} \times \frac{1}{1 + \frac{\bar{I}_\perp - \bar{I}_\parallel}{ML^2}}$$

$\cos\phi = \frac{g}{\omega^2 L}$  est le résultat pour un point matériel de masse  $M$  en  $G$ .

Pour un objet étendu,  $\cos\phi$  est plus petit, donc  $\phi$  est plus grand,

tant que  $\bar{I}_\perp > \bar{I}_\parallel$ , ce qui est le cas

pour une barre. Si l'objet suspendu était une plaque perpendiculaire à  $\vec{e}_2$ , ce serait l'inverse puisque dans ce cas  $\bar{I}_\perp < \bar{I}_\parallel$ .

## VIII - Mouvement autour d'un point fixe

### Équations d'Euler

Pour décrire le mouvement d'un solide autour d'un point fixe  $C$ , il est utile de considérer le repère  $(C, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  où  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  sont les axes principaux d'inertie en  $C$ . Le mouvement du solide est complètement décrit par un vecteur  $\vec{\omega}(t)$ , que l'on peut décomposer en

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3$$

Le moment cinétique en  $C$  est donné par

$$\vec{L}_C = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3$$

où  $I_1, I_2$  et  $I_3$  sont les moments principaux d'inertie.

La dérivée de  $\vec{L}_C$  est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_C}{dt} = & I_1 \left( \dot{\omega}_1 \vec{e}_1 + \omega_1 \frac{d\vec{e}_1}{dt} \right) + I_2 \left( \dot{\omega}_2 \vec{e}_2 + \omega_2 \frac{d\vec{e}_2}{dt} \right) \\ & + I_3 \left( \dot{\omega}_3 \vec{e}_3 + \omega_3 \frac{d\vec{e}_3}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1 &= (\omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3) \wedge \vec{e}_1 \\ &= -\omega_2 \vec{e}_3 + \omega_3 \vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$\text{De même, } \frac{d\vec{e}_2}{dt} = \omega_1 \vec{e}_3 - \omega_3 \vec{e}_1$$

$$\text{et } \frac{d\vec{e}_3}{dt} = -\omega_1 \vec{e}_2 + \omega_2 \vec{e}_1$$

d'où

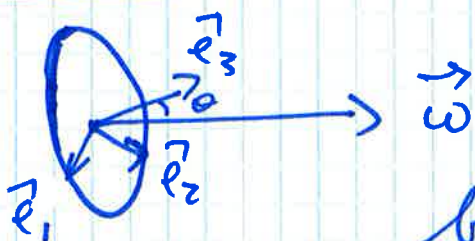
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_C}{dt} &= \left( \bar{I}_1 \dot{\omega}_1 + (\bar{I}_3 - \bar{I}_2) \omega_2 \omega_3 \right) \vec{e}_1 \\ &+ \left( \bar{I}_2 \dot{\omega}_2 + (\bar{I}_1 - \bar{I}_3) \omega_1 \omega_3 \right) \vec{e}_2 \\ &+ \left( \bar{I}_3 \dot{\omega}_3 + (\bar{I}_2 - \bar{I}_1) \omega_1 \omega_2 \right) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

La théorie du moment cinétique conduit aux équations d'Euler:

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_1 &= \bar{I}_1 \dot{\omega}_1 + (\bar{I}_3 - \bar{I}_2) \omega_2 \omega_3 \\ \vec{\Gamma}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_2 &= \bar{I}_2 \dot{\omega}_2 + (\bar{I}_1 - \bar{I}_3) \omega_1 \omega_3 \\ \vec{\Gamma}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_3 &= \bar{I}_3 \dot{\omega}_3 + (\bar{I}_2 - \bar{I}_1) \omega_1 \omega_2 \end{aligned}$$

Les applications de ces équations sont multiples et fascinantes.

### Equilibrage d'une roue



Une roue est bien équilibrée si elle tourne autour d'un de ses axes d'inertie, disons  $\vec{e}_3$ . Dans ce cas,  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = \omega = \text{constant}$ , et  $\vec{\Gamma}_C^{\text{ext}} = \vec{0}$ . Il n'y a pas de moment exercé sur les axes, et on ne sent pas la rotation des roues.



Si par contre  $\vec{\omega}$  n'est pas parfaitement aligné avec  $\vec{e}_3$ , le repère  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  tournant autour de  $\vec{\omega}$ , les coordonnées de  $\vec{\omega}$  dans ce repère sont données par

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega \sin \theta \sin(\omega t) \\ \omega_2 = \omega \sin \theta \cos(\omega t) \\ \omega_3 = \omega \cos \theta \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\omega^2 \sin \theta \cos(\omega t) \\ \dot{\omega}_2 = \omega^2 \sin \theta \sin(\omega t) \\ \dot{\omega}_3 = 0 \end{cases}$$

Par ailleurs,  $I_1 = I_2 = I_{\perp}$  et  $I_3 = I_{\parallel}$ . On en déduit que les composantes de  $\vec{\Gamma}_C^{\text{ext}}$  sur  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  ne sont pas nulles, mais sont données par

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_1 &= (I_{\perp} + (I_{\parallel} - I_{\perp}) \cos \theta) \omega^2 \sin \theta \cos(\omega t) \\ \text{et } \vec{\Gamma}_C^{\text{ext}} \cdot \vec{e}_2 &= (I_{\perp} + (I_{\parallel} - I_{\perp}) \cos \theta) \omega^2 \sin \theta \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Le moment des forces exercées sur la roue dépend du temps de façon périodique, d'où les vibrations de fréquence  $\omega$  ressenties, et des contraintes sur les axes. En plaçant des masses sur la jante, le garagiste parvient à réaligner  $\vec{e}_3$  avec l'axe de rotation de la roue.

# Solide en rotation libre

Considérons un solide en rotation autour d'un point fixe  $O$  tel qu'en ce point le moment des actions extérieures soit nul. Ce serait par exemple le cas d'un objet soumis à la seule action de la pesanteur dans le référentiel du centre de masse. Dans ce référentiel,  $G$  est fixe et le moment des poids en  $G$  est nul puisqu'il s'applique en  $G$ .

Proposition: Toute rotation autour d'un axe principal d'inertie est stationnaire.

Preuve: Dans ce cas, les équations d'Euler se réduisent à

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0 \end{cases}$$

Elles ont 3 solutions évidentes:

- $\omega_1 = \text{constante}, \omega_2 = \omega_3 = 0 \rightarrow$  rotation stationnaire autour de l'axe principal de moment  $I_1$
- $\omega_2 = \text{constante}, \omega_1 = \omega_3 = 0$
- $\omega_3 = \text{constante}, \omega_1 = \omega_2 = 0$



Exemple: La rotation d'un ballon de rugby autour de son axe de révolution est stationnaire. De même, la rotation autour d'un axe perpendiculaire à cet axe est stationnaire. Par contre, la rotation par rapport à un axe quelconque ne l'est pas. Si par exemple on considère un ballon de foot, qui est sphérique, tout axe est un axe principal d'inertie, et toute rotation est stationnaire.

Stabilité des solutions: supposons que

$$\dot{\omega}_1 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = \text{constante.}$$

Considérons de petites variations autour de  $\omega_2 = \omega_3 = 0$ . D'après les équations d'Euler, on a:

$$\begin{cases} I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 \Rightarrow I_2 \ddot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \dot{\omega}_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0 \Rightarrow I_3 \ddot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \dot{\omega}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_2 I_3 \ddot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)(I_1 - I_2) \omega_1^2 \omega_2 = 0 \\ I_3 I_2 \ddot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)(I_3 - I_1) \omega_1^2 \omega_3 = 0 \end{cases}$$

$\omega_2$  et  $\omega_3$  vont donc faire de petites oscillations tant que l'équation est de la forme

$$A \ddot{x} + B x = 0 \text{ avec } A \text{ et } B > 0$$

$$\Rightarrow (I_1 - I_3)(I_1 - I_2) > 0$$

$$\Rightarrow I_1 > I_2, I_3 \text{ ou } I_1 < I_2, I_3.$$

Conclusion: Les oscillations sont stables si elles ont lieu autour d'un axe correspondant au plus grand ou au plus petit des moments d'inertie, mais pas au moment d'inertie intermédiaire.

## Gyroscope

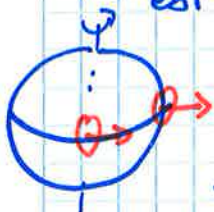
Un gyroscope est un solide de révolution tournant autour de son axe, en général à très grande vitesse  $\vec{\Omega}$ , et suspendu par son centre de masse  $G$  de façon parfaite, c'est-à-dire pouvant choisir librement son orientation sans aucune résistance.

Proposition: Dans un référentiel galiléen,  
 $\vec{\Omega} = \text{constante}.$

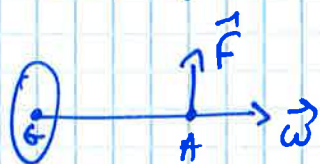
Preuve:  $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{0}$  puisque les seules forces, le poids et la réaction au point de fixation, passent par  $G$  et ont un moment nul.

Or, comme le gyroscope tourne autour de son axe de révolution, qui est un axe principal d'inertie,  $\vec{L}_G = I \vec{\Omega}$ . Donc,  $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{0}$ .

Application: Dans le référentiel de Ptolémée, qui est une bonne approximation d'un référentiel galiléen,  $\vec{\Omega}$  est constant. Or la terre tourne sur elle-même. Donc le gyroscope tourne par rapport à la terre pour garder une orientation fixe par rapport à un point du ciel déterminé par des étoiles fixes. A l'équateur, si son axe est horizontal à midi, il est vertical à 18h00.



Comportement paradoxal: Si on applique une force verticale sur un gyroscope d'axe horizontal, il dévie dans le plan horizontal.



Explication: 
$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{F} = \Omega \times F \hat{\xi} \wedge \hat{\eta} = \Omega \times F \hat{\zeta}$$

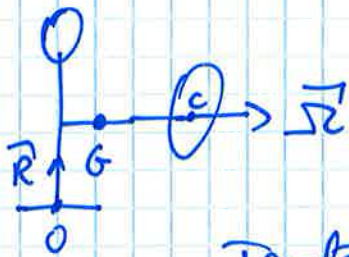
$$\Rightarrow \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{\Omega \cdot F}{I} \hat{\zeta} \parallel \hat{\zeta}, \text{ donc } \perp \vec{F}!$$

## Effets gyroscopiques

On parle d'effets gyroscopiques pour désigner le comportement dynamique d'un objet de révolution (disque, roue, etc...) dont la rotation autour de son axe a pour effet de résister aux changements de son orientation.

## Exemples:

- ① Personne sur tabouret avec roue de vélo en rotation:



$$\vec{F}^{\text{ext}} = \underbrace{M\vec{g}}_{\text{poids totale}} + \vec{R} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{réaction du} \\ \text{sol} \end{array}$$

Toutes les forces sont verticales  
 $\rightarrow \vec{\Gamma}_G^{\text{ext}} = \vec{OG} \wedge \vec{R} \perp \vec{R}$

$$\rightarrow \vec{\Gamma}_G^{\text{ext}} \cdot \vec{z} = 0$$

Du coup,  $\frac{d(\vec{L}_G \cdot \vec{z})}{dt} = 0$ , où  $\vec{L}_G$  est le moment cinétique total en G.

$$\text{Au départ, } \vec{L}_G = \vec{L}_C^* + \vec{OC} \wedge m \vec{v}_C \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{masse de} \\ \text{la roue} \end{array} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{vitesse du} \\ \text{centre de la} \\ \text{roue} = \vec{v} \end{array}$$

$$\vec{L}_C^* = I \vec{\Omega} \Rightarrow \vec{L}_G \cdot \vec{z} = I \vec{\Omega} \cdot \vec{z} = 0$$

Si on change l'inclinaison de la roue, la conservation de  $\vec{L}_G \cdot \vec{z}$  implique une rotation du tabouret à la vitesse  $\vec{\omega}$  telle que la composante  $\vec{z}$  de  $\vec{L}_G$  reste nulle. En effet, si  $\vec{\omega} = \vec{v}$ , on aurait

$$\vec{L}_G \cdot \vec{z} = I \vec{\Omega}' \cdot \vec{z} \neq 0$$

où  $\vec{\Omega}'$  est la nouvelle orientation de

vecteur rotation de la roue. Dans le cas où la roue est à la verticale de la tête de la fourche, on a :

$$\vec{L}_G = I(\Omega \vec{z} + \vec{\omega}) + \underbrace{I_{P+T}}_{\text{moment d'inertie } I_{P+T} \text{ de la fourche + tabouret}}$$

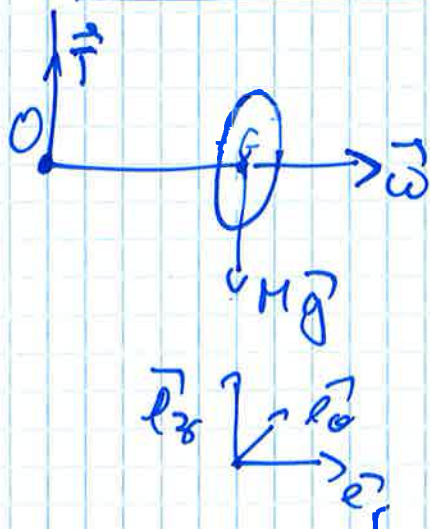
moment d'inertie  $I_{P+T}$  de la fourche + tabouret

Par conservation du moment cinétique parallèle à  $\vec{z}$ , on a  $\vec{L}_G = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = - \frac{I}{I + I_{P+T}} \Omega \vec{z}$$

On a un effet similaire si au départ le vecteur rotation de la roue est perpendiculaire à GC et horizontal, et qu'en fait pivoter la roue pour que sa vitesse  $\Omega$  acquière une composante verticale.

(2) Roue de vélo suspendue en un point de son axe de rotation :



$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G + \vec{L}_G^*$$

$$\vec{L}_G^* = I \vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{g} = OG \cdot Mg \vec{e}_\theta$$

$$\begin{aligned}
 \text{Or, } \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{OG}_A M \vec{v}_G) + \frac{d}{dt} \vec{L}_G^* \\
 &= \vec{OG}_A M \vec{a}_G + \frac{d}{dt} \vec{L}_G^* \\
 &= \vec{OG}_A (\vec{P} + \vec{T}) + \frac{d}{dt} \vec{L}_G^*
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G^* = - \vec{OG}_A \vec{T}$$

En première approximation,  $\vec{T} + \vec{P} \simeq \vec{0}$  car le centre de masse  $G$  a un mouvement de rotation très lent, donc une accélération centripète très petite.

$$\text{Ainsi, } \frac{d}{dt} \vec{L}_G^* \simeq \vec{OG}_A M \vec{g}$$

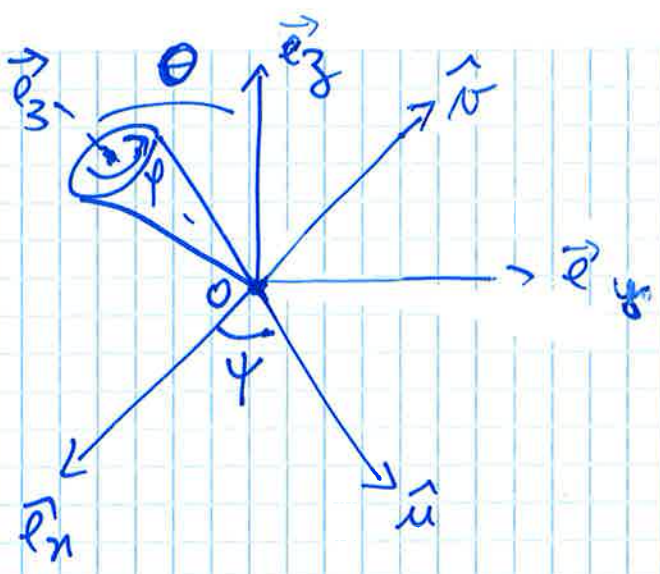
$$\Rightarrow I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{OG}_A M g \vec{e}_\theta$$

L'axe de la roue reste dans le plan horizontal et tourne autour du point  $O$ . C'est un mouvement de précession.

### Toupe

Une toupe est un objet à symétrie de révolution qui tourne autour de son axe de révolution, et donc une extrémité reste fixe. Il est commode de prendre cette extrémité comme origine du repère.





$$\hat{u} \parallel \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z$$

$\vec{e}_z =$  axe de révolution de la toupie

$$\vec{v} = \vec{e}_z \wedge \hat{u}$$

Il est commode de repérer la toupie par 3 angles dits angles d'Euler. Les mouvements associés sont :

- $\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} \vec{e}_z : \text{rotation propre} \\ \dot{\theta} \vec{e}_y : \text{précession} \\ \dot{\theta} \hat{u} : \text{nutation} \end{array} \right.$

Dans l'approximation gyroscopique, on suppose que la vitesse de rotation propre est beaucoup plus grande que les autres. Dans ces conditions, le moment cinétique au point O est le long de  $\vec{e}_z$ , et le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OG} \wedge m\vec{g} \approx \vec{L}_O \wedge m\vec{g} \frac{l}{L_0}$$

avec  $l = OG$  le vecteur  $\vec{L}_O$ , et donc la toupie, est en mouvement de

précession autour de la verticale  $\vec{e}_3$ ,  
avec une vitesse angulaire

$$\dot{\psi} = \frac{mgl}{L_0} = \frac{mgl}{I_3 \dot{\phi}}$$

La vitesse de précession est inversement proportionnelle à la vitesse de rotation propre.

Un traitement plus détaillé basé sur les équations d'Euler permet de montrer qu'il y a aussi un mouvement de nutation autour d'une valeur de  $\theta$ , avec des oscillations entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Il existe néanmoins des solutions particulières  $\theta = \theta_0$  constant, auquel cas le mouvement est un pur mouvement de précession.

Remarque: Pour passer de l'équation

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{L}_0 \wedge \frac{mgl}{L_0} = \frac{mgl}{L_0} \vec{e}_3 \wedge \vec{L}_0$$

à la conclusion qu'il s'agit d'un mouvement de précession, on peut se reporter à la démonstration page (58) du fait que l'équation  $\frac{d\vec{O}\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{O}\vec{A}$  conduit à une précession de  $\vec{O}\vec{A}$  autour de  $\vec{\omega}$ .

Complément: Traitement détaillé de la toupie.

Il est commode d'introduire le vecteur  $\hat{n}$  qui forme avec  $\vec{e}_3$  et  $\hat{u}$  un repère orthonormé  $\rightarrow \vec{e}_z = \cos\theta \vec{e}_3 + \sin\theta \hat{v}$

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \dot{\theta} \hat{u} + \dot{\psi} \vec{e}_3 + \dot{\psi} \vec{e}_z \\ &= \dot{\theta} \hat{u} + (\dot{\psi} + \dot{\psi} \cos\theta) \vec{e}_3 + \dot{\psi} \sin\theta \hat{v}\end{aligned}$$

Dans le référentiel de la toupie, on a donc  $\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\psi} \cos\theta$ .

Le moment cinétique par rapport à  $O$  est donné par

$$\vec{L}_O = I_1 \dot{\theta} \hat{u} + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\psi} \cos\theta) \vec{e}_3 + I_1 \dot{\psi} \sin\theta \hat{v}$$

où  $I_3$  est le moment d'inertie par rapport à l'axe de révolution, et  $I_1$  le moment d'inertie par rapport à  $\hat{u}$  (importe quel axe perpendiculaire à l'axe de révolution et passant par  $O$  (donc en fait on relie les axes  $(O, \hat{u})$  et  $(O, \hat{v})$ ).

Le moment du poids par rapport à  $O$  est donné par

$$\vec{M}_O = l \vec{e}_3 \wedge m \vec{g} = -mgl (\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_z)$$

Il en découle que

$$\vec{\Pi}_0 \cdot \vec{e}_3 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\Pi}_0 \cdot \vec{e}_3 = 0.$$

La première équation couplée à l'équation d'Euler

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = \vec{\Pi}_0 \cdot \vec{e}_3$$

conduit à  $I_3 \dot{\omega}_3 = 0$  puisque  $I_1 = I_2$

$$\rightarrow \boxed{L_3 \equiv \vec{L}_0 \cdot \vec{e}_3 = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\psi} \cos \theta) = \text{constante}}$$

Par ailleurs,  $\vec{\Pi}_0 \cdot \vec{e}_3 = 0$  implique que

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_0 \cdot \vec{e}_3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{L_3 \equiv \vec{L}_0 \cdot \vec{e}_3 = L_3 \cos \theta + I_1 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta = \text{constante}}$$

Enfin, l'énergie mécanique est conservée.

$$K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_0$$

$$= \frac{1}{2} (I_1 \dot{\theta}^2 + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + I_1 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta)$$

$$V = m g l \cos \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + m g l \cos \theta = \text{cte}}$$

En utilisant les constantes  $L$  et  $L_z$ , on peut éliminer  $\dot{\psi}$  et  $\dot{\varphi}$  de l'énergie mécanique. En effet,

$$L_z = L_3 \cos \theta + I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow \dot{\psi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

$$\text{et } \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = \frac{L_3}{I_3}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3} + mgl \cos \theta$$

ou encore

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta)$$

$$\text{avec } V_{\text{eff}}(\theta) = mgl \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} + \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3}$$

Ce potentiel a un minimum en  $\theta_0$  défini par :

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\theta} = -mgl \sin \theta + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta) L_3 \sin \theta}{I_1 \sin^4 \theta} - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2 \cos \theta}{I_1 \sin^3 \theta} = 0$$

Posons  $E_0 = V_{\text{eff}}(\theta_0)$ .

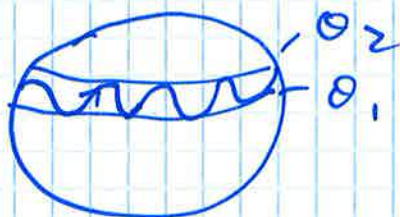
- Si  $E > E_0$ ,  $\theta$  oscille entre 2 valeurs  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .
- Si  $E = E_0$ ,  $\theta = \theta_0 = \text{constant}$ .

Nature du mouvement:

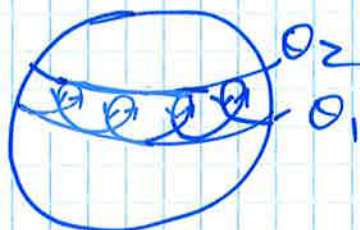
$$\boxed{E > E_0} \quad \text{comme } \dot{\varphi} = \frac{L_3 - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta},$$

deux cas de figure peuvent se présenter:

- $\dot{\varphi}$  ne change pas de signe entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$   $\rightarrow$  le centre de masse oscille simplement sur la sphère de rayon  $l$



- $\dot{\varphi}$  change de signe entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$   $\rightarrow$  le centre de masse fait des boucles



$$\boxed{E = E_0} \quad \theta_0 \text{ est donné par } \frac{\partial V_{\text{eff}}(\theta_0)}{\partial \theta} = 0.$$

Cette condition sur  $\theta_0$  peut se réécrire en fonction de  $\dot{\varphi}$  et  $\varphi$ :

$$-mgl \sin \theta_0 + \dot{\psi} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\psi} \cos \theta_0) \sin \theta_0 - I_1 \dot{\psi}^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = 0$$

Dans le cas générique où  $\theta_0 \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ , on en déduit :

$$\dot{\psi}^2 (I_3 \cos \theta_0 - I_1 \cos \theta_0) + I_3 \dot{\psi} \dot{\psi} - mgl = 0$$

ou encore, en supposant  $I_1 > I_3$ ,

$$(I_1 - I_3) \cos \theta_0 \dot{\psi}^2 - I_3 \dot{\psi} \dot{\psi} + mgl = 0$$

$$\Delta = I_3^2 \dot{\psi}^2 - 4mgl(I_1 - I_3) \cos \theta_0$$

Pour  $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ , un tel mouvement n'existe que si

$$I_3 \dot{\psi} > \sqrt{4mgl(I_1 - I_3) \cos \theta_0} \equiv I_3 \dot{\psi}_{\min}$$

Si  $\dot{\psi} > \dot{\psi}_{\min}$ , alors il existe deux mouvements de précession :

$$\dot{\psi}_{\pm} = \frac{I_3 \dot{\psi} \pm \sqrt{I_3^2 \dot{\psi}^2 - 4mgl(I_1 - I_3) \cos \theta_0}}{2(I_1 - I_3) \cos \theta_0}$$

On peut montrer que c'est le mouvement de précession le plus lent décrit par  $\dot{\psi}_-$  qui est stable, et donc que c'est lui qui doit être observé.