Chapitre VIII - Solides indéformables

I. Introduction

Un solide indéformable peut être vu comme un ensemble de points matériels dont les distances relatives restent fixes au cours du temps.

La position d'un solide peut être repérée par 6 paramètres, par exemple les 3 coordonnées d'un point, et 3 angles qui repèrent les positions de 3 vecteurs orthonormés formant un repère lié au solide (par exemple les angles d'Euler, que nous introduirons un peu plus tard).

Or, nous avons vu qu'un système de points matériels satisfait 2 équations :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext} \quad , \quad \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^{ext}$$

Ce sont des équations vectorielles, donc effectivement 6 équations, autant que de paramètres pour fixer la position, et donc le problème est bien posé.

Où se cache la difficulté ? Dans la traduction de ces équations en équations différentielles pour les variables choisies pour décrire le système.

Pour l'équation $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}$, c'est simple. Nous avons vu que $\vec{P} = M\vec{v}_G$, où $\vec{v}_G$ est la vitesse du centre de masse, et donc si on choisit les coordonnées du centre de masse x_G, y_G, z_G comme trois des variables, elles sont régies par les équations

$$m\ddot{x}_G = F_x^{ext}, \quad m\ddot{y}_G = F_y^{ext}, \quad m\ddot{z}_G = F_z^{ext}$$

C'est le moment cinétique qui pose problème. En effet, alors que $\vec{P}$ est simplement relié à la vitesse d'un point, le moment cinétique n'est pas en général proportionnel à la vitesse de rotation instantanée $\vec{\omega}$.

Par ailleurs, les forces peuvent s'appliquer à différents points d'un solide, et il peut être avantageux d'utiliser le théorème du moment cinétique en d'autres points que l'origine du repère, ce qui exige une généralisation du théorème $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{ext}$.

A ce sujet notons que le poids d'un solide peut être considéré comme s'appliquant au centre de masse. En effet, si le solide est considéré comme une collection de masses m_i aux points M_i, le moment du poids en O est défini par

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{OM_i} \wedge m_i \vec{g}$$

$$= \sum_i \vec{OG} \wedge m_i \vec{g} + \sum_i \vec{GM_i} \wedge m_i \vec{g}$$

$$= \vec{OG} \wedge \underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{=M} \vec{g} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{GM_i}\right)}_{=\vec{0}} \wedge \vec{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_0 = \vec{OG} \wedge M\vec{g}}$$

Par ailleurs, le centre de masse pour un solide est en principe défini par une intégrale

$$\vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OM_i} \rightarrow \vec{r}_G = \int d^3\vec{r}\, \underbrace{\rho(\vec{r})}_{\text{densité volumique.}}\, \vec{r}$$

En pratique, on s'intéressera à des solides homogènes, et le centre de masse peut se déduire de simples considérations de symétrie (centre pour une sphère, un cube, un cylindre, un parallélipipède, ...)

II - Cinématique

Commençons par nous familiariser avec la description du mouvement d'un solide. Comme vu précédemment, un solide définit un référentiel, et son mouvement est décrit par deux vecteurs :

- La vitesse d'un point, par exemple A.
- Une vitesse de rotation $\vec{\omega}$.

Pour un point M immobile par rapport au solide, $\vec{v}'_M = \vec{0}$, et on a :

$$\boxed{\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AM}}$$

C'est la relation fondamentale entre les vitesses de deux points d'un solide, vraie pour toute paire de points.

De même, toujours en supposant que M est immobile, $\vec{v}'_M = \vec{0}$ et $\vec{a}'_M = 0$, d'où :

$$\boxed{\vec{a}_M = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AM})}$$

Il est commode de distinguer 4 types de mouvement d'un solide suivant les valeurs de $\vec{v}_A$ et $\vec{\omega}$:

- $\vec{\omega} = \vec{0}$ et $\vec{v}_A = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{v}_M = \vec{0}$ $(\forall M)$

  Le solide est au repos

- $\vec{\omega} = \vec{0}$ et $\vec{v}_A \neq \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{v}_M = \vec{v}_A$

  Le solide est en translation

- $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0$

$$\Rightarrow \vec{v}_M \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} + \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A) \cdot \vec{\omega}}_{=0} = 0$$

Tous les points ont une vitesse perpendiculaire à $\vec{\omega}$.
→ Le solide est en rotation autour d'un axe $/\!/ \vec{\omega}$.

- $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \neq 0$

$$\Rightarrow \vec{v}_M \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_A \cdot \vec{\omega}$$

Tous les points ont la même vitesse projetée sur $\vec{\omega}$. Il s'agit donc d'un mouvement hélicoïdal (rotation d'axe $\vec{\omega}$ + translation $/\!/ \vec{\omega}$).

Axe instantané de rotation:

Si $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, il existe une droite et une seule sur laquelle tous les points ont la même vitesse parallèle à $\vec{\omega}$.

Preuve: Cherchons un point C tel que

$\vec{v}_C \,//\, \vec{\omega}$, ou encore $\vec{\omega} \wedge \vec{v}_C = \vec{0}$.

$$\vec{\omega} \wedge \vec{v}_C = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_A + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AC})}_{= (\vec{\omega} \cdot \vec{AC})\vec{\omega} - \omega^2 \vec{AC} \quad (*)} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{v}_A + (\vec{\omega} \cdot \vec{AC})\vec{\omega} - \omega^2 \vec{AC} = \vec{0}$$

Une solution de cette équation est donnée par

$$\boxed{\vec{AC} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2}}$$

En effet, $\vec{\omega} \cdot \vec{AC} = 0$, et $\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A - \omega^2 \vec{AC} = \vec{0}$.

De plus, si D appartient à la droite définie par C et $\vec{\omega}$, on a:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{CD}}_{= \vec{0} \text{ puisque } \vec{CD} // \vec{\omega}} = \vec{v}_C$$

Enfin, pour un point E qui n'est pas sur la droite, $\vec{\omega} \wedge \vec{CE} \neq \vec{0}$ et $\vec{\omega} \wedge \vec{CE} \perp \vec{\omega}$
$\Rightarrow \vec{v}_E$ n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$.

$(*)$ $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

se démontre aisément en passant en coordonnées cartésiennes.

La nature du mouvement (rotation simple ou mouvement hélicoïdal) se déduit simplement de cette formule.
En effet, si $\vec{AC} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2}$,

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AC}$$

$$= \vec{v}_A + \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A)$$

$$= \vec{v}_A + \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A) \vec{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega}^2 \vec{v}_A$$

$$\vec{v}_C = \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A) \vec{\omega}$$

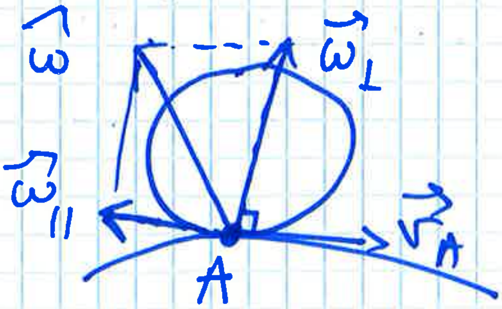
- Si $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0$, $\vec{v}_C = \vec{0}$. Les points sur l'axe instantané de rotation ont une vitesse nulle. Le mouvement est donc un mouvement de rotation.

- Si $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A \neq 0$, $\vec{v}_C$ est parallèle à $\vec{\omega}$. Les points sur l'axe instantané de rotation sont animés d'un mouvement de translation parallèle à $\vec{\omega}$. C'est donc un mouvement hélicoïdal.

Dans tous les cas, l'axe instantané de rotation est l'axe qui passe par C et qui parallèle à $\vec{\omega}$.

Solides en contact :

Considérons un solide S en contact avec un autre, supposé immobile, et supposons que le contact soit réduit à 1 point A, et que les plans tangents des 2 solides soient confondus en ce point.



$\vec{\omega}_{//}$ et $\vec{v}_A$ sont dans le plan tangent, mais pas nécessairement colinéaires.

Le mouvement du solide S est caractérisé par 2 vecteurs, $\vec{v}_A$ (la vitesse du point A de S par rapport à l'autre solide), et le vecteur $\vec{\omega}$.

Comme les solides sont indéformables, $\vec{v}_A$ doit être dans le plan tangent. Par contre, $\vec{\omega}$ peut avoir des composantes parallèles et perpendiculaires au plan tangent :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_{//}$$

Terminologie : $\vec{v}_A$ est appelée vitesse de glissement, $\vec{\omega}_{//}$ vitesse de roulement, et $\vec{\omega}_\perp$ vitesse de pivotement.

- Si $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0$ ($\vec{v}_A \perp \vec{\omega}$), c'est une <u>rotation</u>.
- Si $\vec{v}_A \wedge \vec{\omega} = \vec{0}$ ($\vec{v}_A // \vec{\omega}$), le point C défini par $\vec{AC} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A}{\omega^2} = \vec{0}$ est confondu avec A

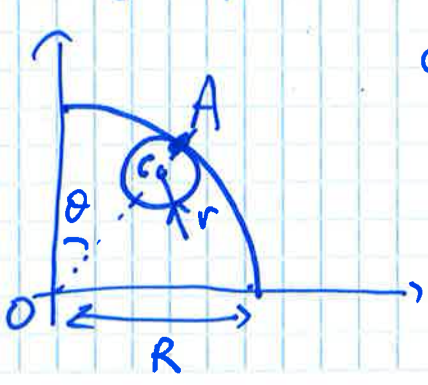
$\rightarrow$ A est sur l'axe instantané de rotation

<u>Cas particulier</u>: Si $\vec{v}_A = \vec{0}$, il n'y a pas de glissement, et le mouvement est en fait mouvement de rotation puisque $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = \vec{0}$. On dit qu'il s'agit d'un <u>roulement sans glissement</u>.

<u>Résumé</u>:

• $\vec{v}_A // \vec{\omega}$	:	l'axe instantané de rotation passe par A.
• $\vec{v}_A \perp \vec{\omega}$	:	mouvement de rotation
• $\vec{v}_A = \vec{0}$	:	<u>Roulement sans glissement</u>. Rotation autour d'un axe passant par A.

<u>Exemple</u>: Bille qui roule sans glisser à l'intérieur d'une sphère. Que peut-on dire sur $\vec{\omega}$?



- Roulement sans glissement : $\vec{v}_A = \vec{0}$.
- Pour tout point de la bille,

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AM} = \vec{\omega} \wedge \vec{AM}$$

- Le centre de la bille a donc pour vitesse

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \wedge \vec{AC}$$

avec $\vec{AC} = -r\,\vec{e_r}$.

- Posons $\vec{\omega} = \omega_r \vec{e_r} + \omega_\theta \vec{e_\theta} + \omega_\phi \vec{e_\phi}$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{AC} = -r(\omega_r \vec{e_r} + \omega_\theta \vec{e_\theta} + \omega_\phi \vec{e_\phi}) \wedge \vec{e_r}$$

$$= -r\omega_\theta \, \vec{e_\theta} \wedge \vec{e_r} - r\omega_\phi \, \vec{e_\phi} \wedge \vec{e_r}$$

$$= r\omega_\theta \, \vec{e_\phi} - r\omega_\phi \, \vec{e_\theta}.$$

- Or, le centre est à la distance $R-r$ de l'origine. D'après les formules en coordonnées sphériques, on a donc :

$$\vec{v} = (R-r)\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + (R-r)\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e_\phi}$$

- En comparant ces deux expressions, on en déduit :

$$\begin{cases} r\omega_\theta = (R-r)\,\dot{\phi}\sin\theta \\ -r\omega_\phi = (R-r)\,\dot{\theta} \end{cases}$$

soit $\begin{cases} \omega_\theta = \dfrac{R-r}{r}\,\dot\phi \sin\theta \\ \omega_\phi = -\dfrac{R-r}{r}\,\dot\theta \end{cases}$

La vitesse de pivotement ω_r n'est pas fixée par la condition de roulement sans glissement.

Mouvement plan sur plan :

On parle de mouvement plan sur plan lorsque, à tout instant, les vitesses de tous les points du solide sont parallèles à un plan fixe Π du référentiel fixe. De façon équivalente, un tel mouvement est caractérisé par le fait qu'une surface plane Σ du solide reste en permanence dans un plan Π.

Propriétés :

① $\vec\omega \perp \Pi$.

En effet, $\vec v_M - \vec v_A = \vec\omega \wedge \overrightarrow{AM}$ doit être parallèle à Π pour tout vecteur $\overrightarrow{AM}$, donc perpendiculaire à la normale à Π, ce qui sera le cas si $\vec\omega \perp \Pi$.

② Le mouvement est soit une translation, soit une rotation.

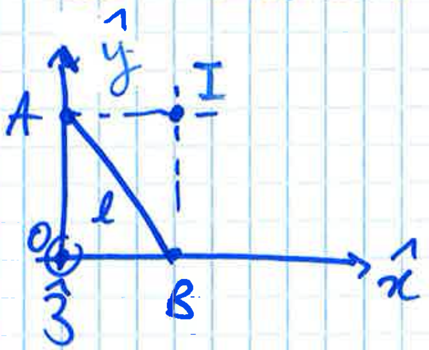
En effet, $\vec{\omega} \cdot \vec{v_A} = 0$. Du coup, soit $\vec{\omega} = \vec{0}$ (translation), soit $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ mais $\vec{\omega} \cdot \vec{v_A} = 0$, et c'est une rotation.

③ Si le mouvement est une rotation, il y a un centre instantané de rotation I dans Σ défini par

$$\vec{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v_A}}{\omega^2}. \text{ Il satisfait } \vec{v_I} = \vec{0}.$$

<u>Exemples :</u>

① Barre qui glisse contre un mur en restant dans un plan vertical.



Où est le centre instantané de rotation, et quelle est sa trajectoire pendant la chute ?

<u>Réponse</u> : Comme la barre reste dans un plan vertical, c'est un mouvement plan sur plan, et $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$.

Le centre instantané de rotation I vérifie

$$\vec{AI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v_A}}{\omega^2} \quad \text{et} \quad \vec{BI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v_B}}{\omega^2}$$

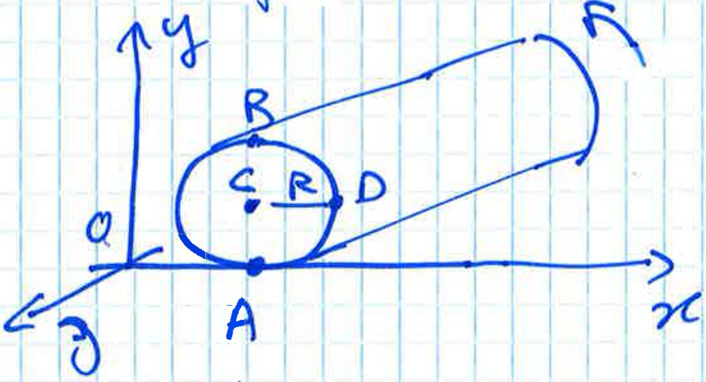
$$\begin{cases} \vec{v_A} \parallel \hat{y} \Rightarrow \vec{AI} \parallel \hat{x} \\ \vec{v_B} \parallel \hat{x} \Rightarrow \vec{BI} \parallel \hat{y} \end{cases}$$

I est donc à l'intersection de la perpendiculaire au mur en A et de la perpendiculaire au sol en B. C'est donc le point qui complète un rectangle avec AOB.

On en déduit que $OC = AB = \ell$

$\Rightarrow$ I décrit un quart de cercle de centre O et de rayon ℓ.

② Cylindre qui roule sans glisser.



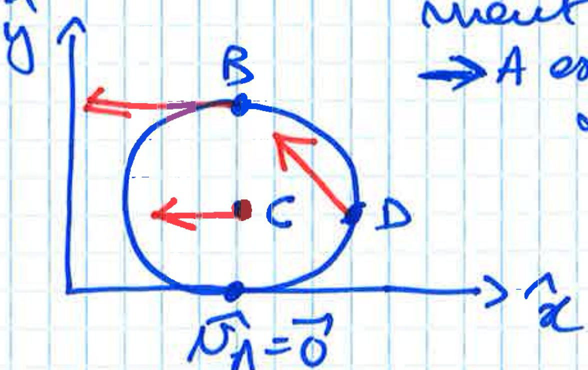
$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$.

Où est le centre instantané de rotation ? que valent les vitesses aux points A, B, C, D ?

Réponse : Comme il s'agit d'un roulement sans glissement, $\vec{v}_A = \vec{0}$.

$\rightarrow$ A est le centre instantané de rotation.

Les autres vitesses sont données par :



$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \wedge \vec{AC}$$
$$= \omega \hat{z} \wedge R \hat{y}$$
$$= -R\omega \hat{x}$$

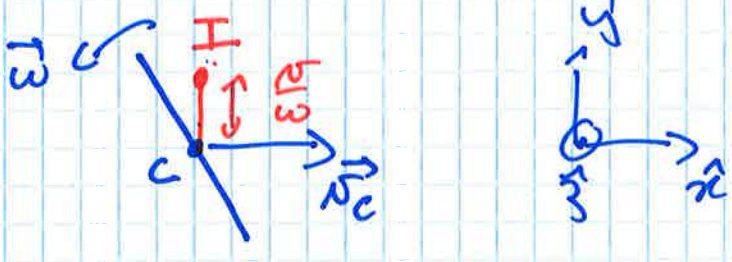
$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \wedge \vec{AB} = 2\vec{v}_c = -2R\omega\,\hat{x}$$

$$\vec{v}_D = \vec{\omega} \wedge \vec{AD} = \vec{\omega} \wedge \vec{AC} + \vec{\omega} \wedge \vec{CD}$$

$$= \omega\,\hat{z} \wedge R\hat{y} + \omega\hat{z} \wedge R\hat{x}$$

$$= -R\omega\,\hat{x} + R\omega\,\hat{y}.$$

(3) Une barre tourne autour de son centre C dans un plan xy. Le centre C est animé d'une vitesse v dans la direction x. Où est le centre instantané de rotation ?



D'après la formule générale,

$$\vec{CI} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_c}{\omega^2}$$

Or, $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ et $\vec{v}_c = v\,\hat{x}$

$$\Rightarrow \vec{CI} = \frac{\omega\,\hat{z} \wedge v\,\hat{x}}{\omega^2} = \frac{\omega v}{\omega^2}\,\hat{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{CI} = \frac{v}{\omega}\,\hat{y}}$$

III - Théorèmes relatifs au moment cinétique

Dans cette section, nous allons établir quelques théorème généraux relatifs au moment cinétique en un point quelconque et à sa dérivée -

Pour un point matériel, nous avons vu que $\vec{L}_A = \vec{AM} \wedge m\vec{v}$ satisfait

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O + \vec{AO} \wedge m\vec{v}$$

Pour un ensemble de points, on définit de même

$$\vec{L}_A = \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

et on a :

$$\vec{L}_A = \sum_i (\vec{AO} + \vec{OM}_i) \wedge m_i \vec{v}_i$$

$$= \sum_i \vec{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{AO} \wedge m_i \vec{v}_i$$

$$= \vec{L}_O + \vec{AO} \wedge \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i}_{= M\vec{v}_G}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_A = \vec{L}_O + \vec{AO} \wedge M\vec{v}_G}$$

Théorème du transfert

Comme nous le verrons, il est souvent utile de considérer le moment cinétique au centre de masse G.

<u>Proposition :</u> $\vec{L}_G = \vec{L}_G^{\,*}$

moment cinétique dans le référentiel du centre de masse

<u>Preuve :</u>

$$\vec{L}_G = \sum_i \vec{GM_i} \wedge m_i \vec{v}_i$$

$$= \sum_i \vec{GM_i} \wedge m_i (\vec{v}_i^{\,*} + \vec{v}_G)$$

$$= \underbrace{\sum_i \vec{GM_i} \wedge m_i \vec{v}_i^{\,*}}_{= \vec{L}_G^{\,*}} + \underbrace{\sum_i \vec{GM_i} \wedge m_i \vec{v}_G}_{= \underbrace{\sum_i m_i \vec{GM_i}}_{= \vec{0}} \wedge \vec{v}_G}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_G = \vec{L}_G^{\,*}.$$

<u>1er théorème de König :</u>

$$\boxed{\vec{L}_A = \vec{L}_G^{\,*} + \vec{AG} \wedge M \vec{v}_G}$$

C'est une conséquence directe de $\vec{L}_A = \vec{L}_O + \vec{AO} \wedge m \vec{v}_G$ appliqué à $O = G$, et de $\vec{L}_G = \vec{L}_G^{\,*}$.

2ème théorème de König :

On peut démontrer un théorème apparenté pour l'énergie cinétique. L'énergie cinétique totale est définie par

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^{\,2}$$

Dans le référentiel du centre de masse, on a : $\vec{v}_i = \vec{v}_i^{\,*} + \vec{v}_G$, d'où

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{v}_i^{\,*} + \vec{v}_G\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{v}_i^{\,*2} + 2\, \vec{v}_i^{\,*} \cdot \vec{v}_G + \vec{v}_G^{\,2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^{\,*2}}_{= K^*} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,*}}_{= \vec{0}} \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i}_{= M} \vec{v}_G^{\,2}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = K^* + \frac{1}{2} M v_G^2}$$

2ème théorème de König

Théorème du moment cinétique par rapport à un point quelconque:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} - \vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G}$$

Preuve:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_O + \vec{AO} \wedge M\vec{v}_G\right)$$

$$= \underbrace{\frac{d\vec{L}_O}{dt}}_{=\vec{M}_O^{ext}} + \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\vec{AO}\right)}_{=-\vec{v}_A} \wedge M\vec{v}_G + \vec{AO} \wedge \underbrace{M\vec{a}_G}_{\vec{F}^{ext}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_O^{ext} + \vec{AO} \wedge \vec{F}^{ext} - \vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G$$

Mais $\vec{M}_O^{ext} + \vec{AO} \wedge \vec{F}^{ext}$

$$= \sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \vec{AO} \wedge \vec{F}_i^{ext}$$

$$= \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{F}_i^{ext} = \vec{M}_A^{ext}$$

Conséquences:

① $\dfrac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{ext}$ puisque $\vec{v}_G \wedge m\vec{v}_G = \vec{0}$

② $\dfrac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext}$ si $\vec{v}_A = \vec{0}$ (c'est le théorème général en un point fixe).

(3) $\dfrac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{ext}$ si $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_G$.

Le théorème du moment cinétique prend une forme particulièrement simple en un point fixe du solide ou au centre de masse.

Résumé :

$$\boxed{\dfrac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A^{ext} \quad \text{si } A = G,\ A \text{ fixe ou } \vec{v}_A \parallel \vec{v}_G}$$

IV - Calcul du moment cinétique

Dans un solide considéré comme un ensemble de points matériels de masses m_i, la vitesse de chaque point matériel i est donnée par

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AM}_i$$

où A est un point du solide et $\vec{\omega}$ la vitesse instantanée de rotation. Du coup, le moment cinétique en A peut s'exprimer uniquement à l'aide de $\vec{v}_A$ et $\vec{\omega}$:

$$\vec{L}_A = \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \vec{L}_A = \sum_i m_i \, \vec{AM_i} \wedge (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AM_i})$$

$$= \underbrace{\left(\sum_i m_i \, \vec{AM_i}\right)}_{M\,\vec{AG}} \wedge \vec{v}_A + \sum_i m_i \, \underbrace{\vec{AM_i} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AM_i})}_{= \vec{AM_i}^2 \vec{\omega} - (\vec{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \vec{AM_i}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_A = M\,\vec{AG} \wedge \vec{v}_A + \sum_i m_i \left(AM_i^2 \, \vec{\omega} - (\vec{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \vec{AM_i}\right)}$$

Si $A = G$, ou si A est fixe ($\vec{v}_A = \vec{0}$), on a :

$$\vec{L}_A = \sum_i m_i \left(AM_i^2 \, \vec{\omega} - (\vec{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \vec{AM_i}\right)$$

Plaçons-nous dans un repère cartésien $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, et appelons (x_i, y_i, z_i) les coordonnées du point M_i.

$$AM_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

$$\vec{AM_i} \cdot \vec{\omega} = x_i \, \omega_x + y_i \, \omega_y + z_i \, \omega_z$$

car $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ et $\vec{AM_i} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$

La composante suivant $\vec{x}$ du vecteur $AM_i^2 \, \vec{\omega} - (\vec{AM_i} \cdot \vec{\omega}) \vec{AM_i}$ est donnée par

$$(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\,\omega_x - (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)\, x_i$$

Le terme $x_i^2 \omega_x$ se simplifie, et il reste

$$(y_i^2+z_i^2)\,\omega_x - x_i y_i\, \omega_y - x_i z_i\, \omega_z$$

Des formules équivalentes sont aisément établies pour les composantes suivant $\hat{y}$ et $\hat{z}$, d'où :

$$\vec{L}_A = \sum_i m_i \underbrace{\begin{pmatrix} (y_i^2+z_i^2)\omega_x - x_i y_i\, \omega_y - x_i z_i\, \omega_z \\ -x_i y_i\, \omega_x + (x_i^2+z_i^2)\omega_y - y_i z_i \omega_z \\ -x_i z_i\, \omega_x - y_i z_i\, \omega_y + (x_i^2+y_i^2)\omega_z \end{pmatrix}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} y_i^2+z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2+z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2+y_i^2 \end{pmatrix}}_{\text{matrice } 3\times 3} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_A = \overline{\overline{I}}_A\, \vec{\omega}}$$

avec $\overline{\overline{I}}_A$, la <u>matrice d'inertie</u> au point A,

$$\overline{\overline{I}}_A = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (z_i^2+y_i^2) & -\sum_i m_i\, x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i\, x_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2+z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i\, x_i z_i & -\sum_i m_i (y_i z_i) & \sum_i m_i (x_i^2+y_i^2) \end{pmatrix}$$

(on parle aussi parfois de <u>tenseur d'inertie</u>)

Cette matrice dépend de l'orientation du trièdre $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ choisi pour exprimer les coordonnées x_i, y_i, z_i et $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Comme elle est symétrique, il doit exister un trièdre $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ dans lequel cette matrice prend une forme diagonale :

$$\overline{\overline{I}}_A = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$ (voir cours d'algèbre)

Si on désigne par $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ les composantes de $\vec{\omega}$ dans cette base, on a le résultat fondamental suivant :

$$\boxed{\vec{L}_A = I_1 \omega_1 \vec{e_1} + I_2 \omega_2 \vec{e_2} + I_3 \omega_3 \vec{e_3}}$$

Les vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ définissent les <u>axes principaux</u> du tenseur d'inertie au point A. Les éléments diagonaux I_1, I_2 et I_3 sont appelés les <u>moments principaux d'inertie</u>.

<u>Remarques</u> :

① Les vecteurs principaux et les moments principaux dépendent du point A.

② $(A, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est appelé un repère d'inertie.

③ En général, $\vec{L}_A$ n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$, sauf dans les cas suivants :

- $\vec{\omega}$ est parallèle à un vecteur principal d'inertie, par exemple $\vec{e}_1$

$$\rightarrow \quad \vec{L}_A = I_1 \vec{\omega}$$

- Deux moments d'inertie sont égaux, par exemple $I_1 = I_2 = I$, et $\vec{\omega}$ est dans le plan engendré par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$\rightarrow \quad \vec{L}_A = I \vec{\omega}$$

- Tous les moments d'inertie sont égaux : $I_1 = I_2 = I_3 = I$. Dans ce cas,

$$\vec{L}_A = I \vec{\omega} \quad \text{pour tout } \vec{\omega}.$$

④ Si $A \neq G$, et si A n'est pas fixe, on a :

$$\boxed{\vec{L}_A = M \, \vec{AG} \wedge \vec{v}_A + \bar{\bar{I}}_A \vec{\omega}}$$

C'est la formule fondamentale qui permet d'exprimer le moment cinétique en un point A du solide en fonction de $\vec{v}_A$ et de $\vec{\omega}$.

⑤ Si l'on a besoin de $\vec{L}_Q$ où Q est quelconque, il faut utiliser le théorème du transfert : $\vec{L}_Q = \vec{L}_A + \vec{QA} \wedge M \vec{v}_G$.

Le calcul du tenseur d'inertie en un point est compliqué car il faut remplacer les sommes par des intégrales.

$$\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \to \int d\vec{r}\, \rho(\vec{r})\, (x^2+y^2)$$

masse volumique

$$\sum_i m_i\, x_i y_j \to \int d\vec{r}\, \rho(\vec{r})\, xy$$

Par ailleurs, la diagonalisation n'est pas simple.

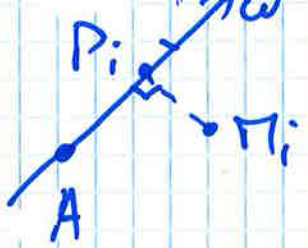
En pratique, on peut s'en sortir simplement à l'aide de quelques résultats faciles à démontrer.

① Si A est un point fixe (donc sur l'axe de rotation Δ d'un solide), et $\hat{u} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$

$$\boxed{\overline{\overline{I}}_A \cdot \hat{u} = I_\Delta\, \omega \quad \text{avec } I_\Delta = \sum_i m_i d_i^2}$$

où d_i est la distance à l'axe de rotation. I_Δ = <u>moment d'inertie par rapport à Δ.</u>

<u>Preuve</u>: Posons $\overrightarrow{AM_i} = \overrightarrow{AP_i} + \overrightarrow{P_iM_i}$, où P_i est la projection de M_i sur l'axe de rotation.



$$\overrightarrow{AM_i}^2 = \overrightarrow{AP_i}^2 + \overrightarrow{P_iM_i}^2$$
$$= \overrightarrow{AP_i}^2 + d_i^2$$

car, $\vec{L}_A = \sum_i m_i \left(AM_i^2 \vec{\omega} - (\vec{AM_i}\cdot\vec{\omega})\vec{AM_i}\right)$

$$\Rightarrow \vec{L}_A\cdot\vec{\omega} = \sum_i m_i \Big(\underset{\substack{\| \\ AP_i^2 + d_i^2}}{AM_i^2}\,\omega^2 - \underbrace{(\vec{AM_i}\cdot\vec{\omega})^2}\Big)$$

$= (\vec{AP_i}\cdot\vec{\omega})^2$ car $\vec{P_iM_i} \perp \vec{\omega}$

$= AP_i^2\,\omega^2$ car $\vec{AP_i} /\!/ \vec{\omega}$

$$\Rightarrow \vec{L}_A\cdot\vec{\omega} = \sum_i m_i d_i^2 \omega^2 \Rightarrow \vec{L}_A\cdot\hat{u} = \sum_i m_i d_i^2 \omega$$

② Théorème de Huyghens-Steiner :

Si Δ_G est l'axe parallèle à Δ passant par G, alors

$$\boxed{I_\Delta = I_{\Delta_G} + M d^2}$$

où d est la distance entre Δ et Δ_G.

Preuve :

$$\vec{L}_A\cdot\vec{\omega} = \sum_i m_i\left[(\vec{AG}+\vec{GM_i})^2\omega^2 - (\vec{AG}\cdot\vec{\omega} + \vec{GM_i}\cdot\vec{\omega})^2\right]$$

$$= \sum_i m_i\Big[(AG^2 + 2\vec{AG}\cdot\vec{GM_i} + GM_i^2)\,\omega^2$$
$$- (\vec{AG}\cdot\vec{\omega})^2 - (\vec{GM_i}\cdot\vec{\omega})^2 - 2(\vec{AG}\cdot\vec{\omega})(\vec{GM_i}\cdot\vec{\omega})\Big]$$

$$= \sum_i m_i\left[GM_i^2\omega^2 - (\vec{GM_i}\cdot\vec{\omega})^2\right]$$

$$+ \sum_i m_i\left[AG^2\omega^2 - (\vec{AG}\cdot\vec{\omega})^2\right]$$

$$+ \sum_i m_i\left[2(\vec{AG}\cdot\vec{GM_i})\,\omega^2 - 2(\vec{AG}\cdot\vec{\omega})(\vec{GM_i}\cdot\vec{\omega})\right]$$

Le premier terme est égal à $\vec{L}_G \cdot \vec{\omega}$.

Le deuxième terme est égal à $M d^2 \omega^2$.

Le troisième terme peut être réécrit

$$2\left(\vec{AG} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{GM_i}}_{=\vec{0}}\right)\omega^2 - 2\left(\vec{AG}\cdot\vec{\omega}\right)\left(\underbrace{\sum_i m_i \vec{GM_i}}_{=\vec{0}}\right)\cdot\vec{\omega}$$

Il est donc nul.

Finalement, $\vec{L}_A \cdot \vec{\omega} = \underbrace{\vec{L}_G \cdot \vec{\omega}}_{I_{\Delta_G}\omega^2} + M d^2 \omega^2$

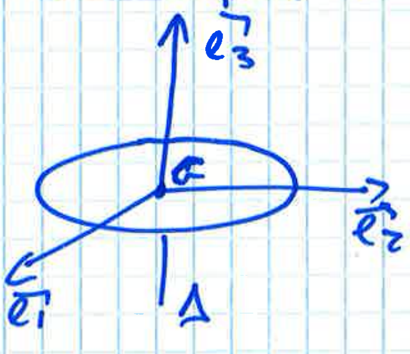
$$\Rightarrow I_\Delta = I_{\Delta_G} + M d^2$$

③ Pour les solides ayant des symétries, les axes principaux sont déterminés par les symétries. C'est particulièrement utile au point G, où les symétries fixent le plus souvent tous les axes principaux.

Règle de symétrie : ~~Est~~ axe principal d'inertie en A tout axe passant par A et satisfaisant l'une des propriétés suivantes :

- C'est un axe de symétrie
- Il est perpendiculaire à un plan de symétrie.

Exemple : Anneau homogène, masse M

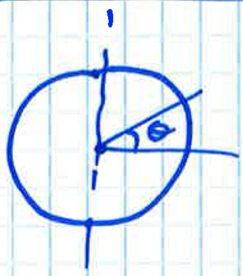


$\vec{e_3}$: axe de symétrie.

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ (et tout vecteur dans le plan $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$) sont perpendiculaire à 1 plan vertical passant par Δ. Par exemple, $\vec{e_1} \perp$ plan $(\Delta, \vec{e_2})$, qui est 1 plan de symétrie.

$$\boxed{I_3 = MR^2}$$ (Evident. Toute la masse est à la distance R).

$$\boxed{I_1 = I_2 = \frac{1}{2} MR^2}$$



$$I = \sum_i m_i d_i^2$$

$$\to \int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{densité linéaire}}}{\lambda} R d\theta \times d^2 \qquad d = R\cos\theta$$

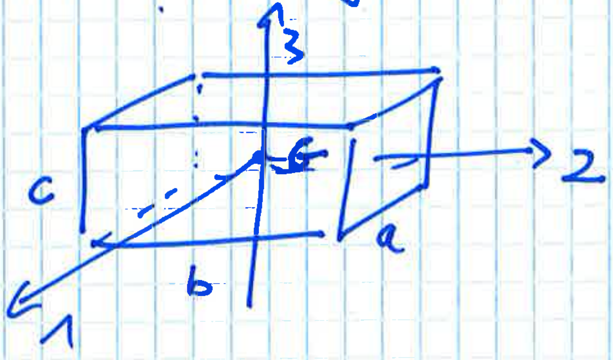
$$\left(\int_0^{2\pi} \lambda R d\theta = M \Rightarrow \lambda = \frac{M}{2\pi R} \right)$$

$$\to I = \int_0^{2\pi} \lambda R d\theta \, R^2 \cos^2\theta$$

$$= \lambda R^3 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{M}{2\pi R} R^3 \pi = \frac{1}{2} MR^2.$$

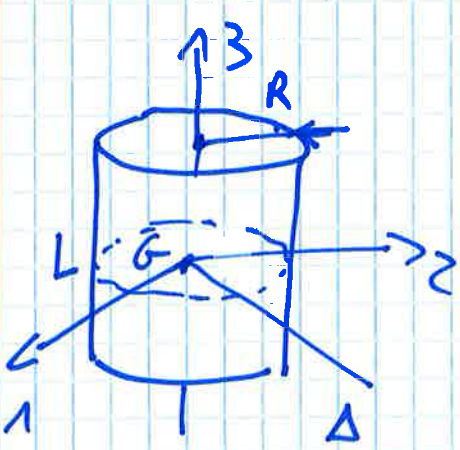
Table des principaux moments d'inertie :

On suppose que les systèmes sont homogènes



$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{12} M (b^2 + c^2) \\ I_2 = \frac{1}{12} M (c^2 + a^2) \\ I_3 = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) \end{cases}$$

Parallélépipède rectangle plein



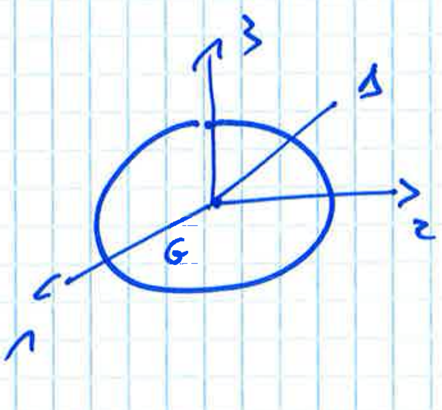
Plein : $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$

$$I_3 = \frac{1}{2} MR^2$$

Creux : $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$

$$I_3 = MR^2$$

Cylindre de révolution



$$I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{5} MR^2$$

Boule pleine

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{3} MR^2$$

sphère creuse

Sphère

4) Rotation autour d'un axe quelconque :

Si Δ est un axe quelconque (et pas un axe principal d'inertie), le moment I_Δ peut se calculer à partir du tenseur d'inertie. En effet,

$$I_\Delta \omega^2 = \vec{L}_A \cdot \vec{\omega} = (\bar{\bar{I}}_A \vec{\omega}) \cdot \vec{\omega}$$

Si $\bar{\bar{I}}_A$ est diagonal, on a en particulier :

$$I_\Delta \omega^2 = (I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3) \cdot (\omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3)$$

$$= I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_\Delta = \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}}$$

V. Energie cinétique

Comme $\vec{v}_{M_i} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AM_i}$, on a :

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_{M_i}^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AM_i})^2$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i}_{=M} \vec{v}_A^2 + \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{AM_i})}_{= M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{AG})} + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{AM_i})^2$$

De plus, $(\vec{a}\wedge\vec{b})^2 = a^2b^2\sin^2\alpha$ et $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = a^2b^2\cos^2\alpha$

$$\Rightarrow (\vec{a}\wedge\vec{b})^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = a^2b^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = a^2b^2$$

$$\Rightarrow (\vec{a}\wedge\vec{b})^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

Ainsi, $\frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{\omega}\wedge\vec{AM_i})^2$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(AM_i^2\,\omega^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{AM_i})^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{L_A}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}_A\vec{\omega}$$

Finalement,

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}M v_A^2 + M\vec{v}_A\cdot(\vec{\omega}\wedge\vec{AG}) + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}_A\vec{\omega}}$$

Cas particuliers :

- Si $\vec{v}_A = \vec{0}$, $\boxed{E_c = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}_A\vec{\omega} = \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2}$

où Δ est l'axe parallèle à ω passant par A.

- Si $A = G$, $\boxed{E_c = \frac{1}{2}M v_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}_G\vec{\omega}}$

On retrouve le deuxième théorème de König $K = \frac{1}{2}m v_G^2 + K^*$, avec $K^* = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\bar{\bar{I}}_G\vec{\omega}$.

Résumé :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ fixe ou } A = G}$$

- $\dfrac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext}$

- $\vec{L}_A = \overline{\overline{I}}_A \vec{\omega} = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_2 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3$

  avec $I_\Delta = I_{\Delta_G} + M d^2$

  ou $\vec{L}_A = \vec{L}_G^* + \vec{AG} \wedge M \vec{v}_G$ (toujours vrai)

- $E_c = \dfrac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overline{\overline{I}}_A \vec{\omega} = \dfrac{1}{2} I_\Delta \omega^2$ (A fixe)

  ou $E_c = \dfrac{1}{2} m v_G^2 + \dfrac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overline{\overline{I}}_G \vec{\omega}$

$$\boxed{\text{Si } A \text{ n'est pas fixe}}$$

- $\dfrac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} - \vec{v}_A \wedge M \vec{v}_G$

- $\vec{L}_A = \overline{\overline{I}}_A \vec{\omega} + M \vec{AG} \wedge \vec{v}_A$

  (ou $\vec{L}_A = \vec{L}_G^* + \vec{AG} \wedge M \vec{v}_G$)

- $E_c = \dfrac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overline{\overline{I}}_A \vec{\omega} + \dfrac{1}{2} M v_A^2 + M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{AG})$