Chapitre VII - Système de points matériels

I - Forces intérieures et forces extérieures

Considérons un ensemble de points matériels de masses m_i et repérés par leur position M_i. Le principe fondamental appliqué au point matériel i s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$$

où $\vec{F}_i^{ext}$ est la somme des forces extérieures appliquées à i, et $\vec{F}_{j\to i}$ la force exercée par le point j sur le point i.

Définissons la quantité de mouvement totale $\vec{P}$ par

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$$

Il vient :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$$

Mais la somme $\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$ peut se réécrire comme

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i} = \sum_{(i,j)} \left(\vec{F}_{i\to j} + \vec{F}_{j\to i}\right)$$

où $\sum_{(i,j)}$ signifie qu'on somme sur toutes les paires de particules.

Or, d'après la 3ème loi de Newton,

$$\vec{F}_{i\to j} + \vec{F}_{j\to i} = \vec{0}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}}$$

avec $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ et $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$

De même, pour un point matériel, nous avons vu que le moment cinétique $\vec{L}_{O,i}$ satisfait :

$$\frac{d\vec{L}_{O,i}}{dt} = \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_i$$

avec $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$

Si on définit le moment cinétique total $\vec{L}_O$ par

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{O,i},$$

il vérifie

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_{j\to i}$$

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{OM_i}\wedge \vec{F}_{j\to i} = \sum_{(i,j)} \left(\vec{OM_i}\wedge \vec{F}_{j\to i} + \vec{OM_j}\wedge \vec{F}_{i\to j}\right)$$

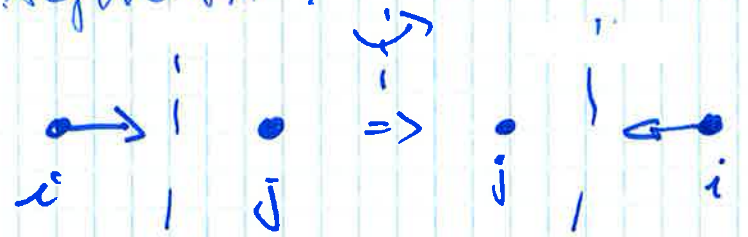
Comme $\vec{F}_{i\to j} = -\vec{F}_{j\to i}$, on peut écrire

$$\vec{OM_i}\wedge \vec{F}_{j\to i} + \vec{OM_j}\wedge \vec{F}_{i\to j}$$

$$= \left(\vec{OM_i} - \vec{OM_j}\right)\wedge \vec{F}_{j\to i}$$

$$= \vec{M_jM_i}\wedge \vec{F}_{j\to i}$$

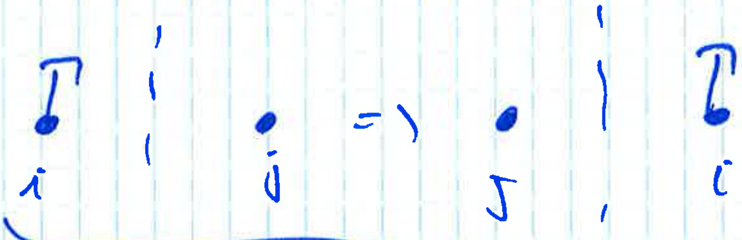
On fait par ailleurs l'hypothèse que les forces $\vec{F}_{i\to j}$ et $\vec{F}_{j\to i}$ sont parallèles au vecteur $\vec{M_iM_j}$, ce qu'on peut rendre plausible par des arguments de symétrie :



$\vec{F}_{d\to g} = -\vec{F}_{g\to d}$

droite gauche

mais



$\vec{F}_{d\to g} = \vec{F}_{g\to d}$

ne satisfait pas la 3ème loi

Du coup, $\vec{M_jM_i}\wedge \vec{F}_{j\to i} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{OM_i}\wedge \vec{F}_{j\to i} + \vec{OM_j}\wedge \vec{F}_{i\to j} = \vec{0}$

et donc finalement

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_i^{ext}$$

$$= \sum_i \vec{M}_{0,i}^{ext}$$

ou encore

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^{ext}}$$

où $\vec{M}_{0,i}^{ext}$ est le moment des forces extérieures qui s'exercent sur i et $\vec{M}_0^{ext}$ la somme des moments extérieurs.

II - Statique

Une première application de ces lois concerne les conditions d'équilibre d'un système de points matériels. En effet, si un système ne bouge pas (il est statique), on a :

$$\begin{cases} \vec{r}_i(t) = \text{constante} \\ \vec{v}_i(t) = \vec{0} \end{cases}$$

d'où $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{0}$

et $\vec{L}_0 = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \vec{0}$

Cela implique que

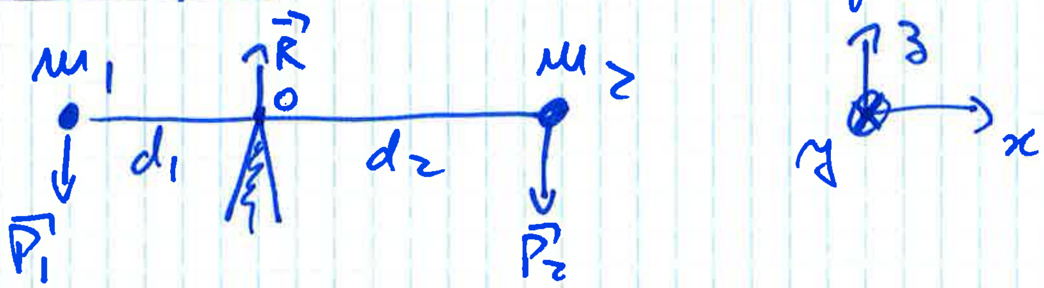
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{L_0}}{dt} = \vec{0}$$

et donc que

$$\vec{F}^{ext} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{M}_0^{ext} = \vec{0}.$$

Si un système est à l'équilibre, la somme des forces extérieures et la somme des moments des forces extérieures sont nulles.

<u>Exemple:</u> d_1, d_2 à l'équilibre ?



$$\vec{F}^{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_0^{ext} = \vec{0} \Rightarrow ?$$

On peut choisir O où on veut, mais le plus simple est de choisir O là où s'applique $\vec{R}$

$$\Rightarrow \vec{M}_0^{ext} = \vec{OM_1} \wedge \vec{P_1} + \underbrace{\vec{OO} \wedge \vec{R}}_{=\vec{0}} + \vec{OM_2} \wedge \vec{P_2}$$

$$\vec{OM_1} \wedge \vec{P_1} = -d_1 \vec{x} \wedge (-m_1 g)\vec{z} = -m_1 d_1 g \vec{y}$$

$$\overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{P_2} = d_2 \vec{x} \wedge (-m_2 g)\vec{z} = m_2 d_2 g \vec{y}$$

$$\Rightarrow -m_1 d_1 g + m_2 d_2 g = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1}}$$

$m_1 > m_2 \Rightarrow d_1 < d_2$ - C'est logique.

<u>Remarque</u>: Si on avait choisi un point A n'importe où entre M_1 et M_2, on arriverait au même résultat. En effet,

$$\vec{M}_A^{ext} = \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{P_1} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{P_2}$$

$$= \overrightarrow{AO} \wedge \vec{P_1} + \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{P_1} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{P_2} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{P_2}$$

$$= \overrightarrow{AO} \wedge (\underbrace{\vec{P_1} + \vec{R} + \vec{P_2}}_{=\vec{0}}) + \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{P_1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{P_2}$$

$$= \vec{M}_O^{ext} \rightarrow \text{même condition.}$$

III - Systèmes isolés

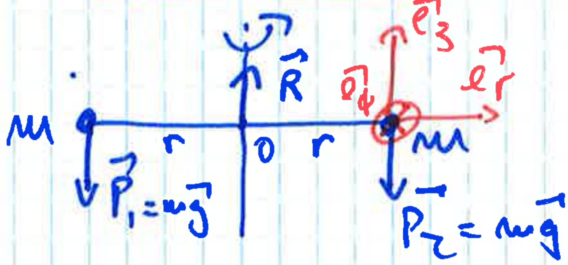
Un système est dit isolé si les sommes des forces extérieures et de leurs moments sont nulles. Dans ce cas,

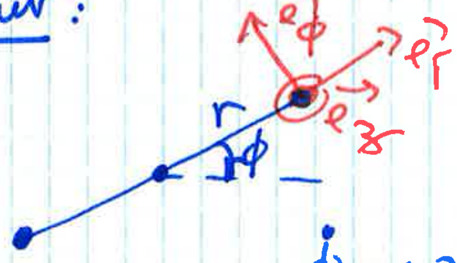
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = \text{constante} \\ \dfrac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L_O} = \text{constante} \end{cases}$$

Par contre, l'énergie n'est pas conservée parce qu'il peut y avoir des forces internes qui travaillent.

Exemple :

Tabouret tournant :





$\dot{\phi} = \omega$

(vue de dessus)

Mouvement dans un plan horizontal

$$\Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{R} = \vec{0}$$

Moment par rapport à O :

$$\vec{OM}_1 \wedge \vec{P}_1 + \vec{OM}_2 \wedge \vec{P}_2$$

$$= \underbrace{(\vec{OM}_1 + \vec{OM}_2)}_{=\vec{0}} \wedge m\vec{g} = \vec{0}.$$

Donc le moment cinétique par rapport à O est conservé.

Mais

$$\vec{L}_O = \vec{OM}_1 \wedge m\,\vec{v}_1 + \vec{OM}_2 \wedge m\,\vec{v}_2$$

$$= r\vec{e}_r \wedge (m\,r\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi) + (-r\vec{e}_r) \wedge (-mr\dot{\phi}\vec{e}_\phi)$$

$$= 2\,m\,r^2\dot{\phi}\,\vec{e}_3$$

soit, avec $\dot{\phi} = \omega$,

$$\vec{L}_0 = 2 m r^2 \omega \vec{e_z}$$

Comme $\frac{d\vec{L_0}}{dt} = 0$, on en déduit

$$r^2 \omega = \text{constante}.$$

Du coup, si on diminue le rayon, ω augmente :

$$\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}}$$

C'est grâce à cet effet que les patineurs font des pirouettes à très grandes vitesses de rotation.

<u>Remarque :</u> La quantité de mouvement et le moment cinétique sont conservés si on passe de r_1 à r_2, mais pas l'énergie cinétique.

En effet, $\vec{P} = m(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$ et $\frac{d\vec{L_0}}{dt} = 0$. Par contre, l'énergie cinétique est donnée par

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 = m v^2 = m r^2 \omega^2$$

$$\Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{m r_2^2 \omega_2^2}{m r_1^2 \omega_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \frac{r_1^4}{r_2^4} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Explication: Pour rapprocher les masses, il faut leur appliquer des forces qui travaillent.

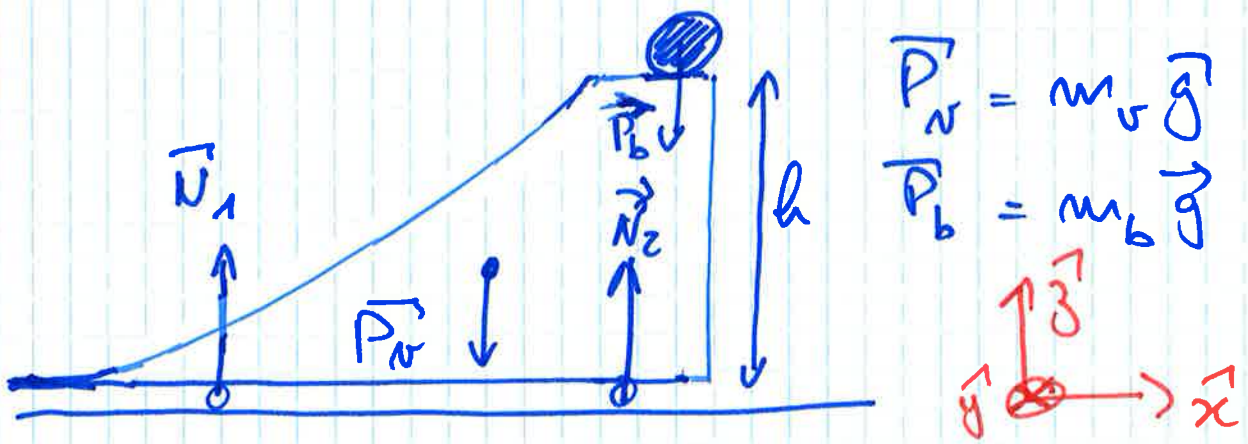
Un système est dit partiellement isolé selon une direction $\vec{u}$ si

$$\vec{F}^{ext} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{M}_0^{ext} \cdot \vec{u} = 0$$

Dans ce cas, seules les composantes suivant $\vec{u}$ sont conservées:

$$\vec{P} \cdot \vec{u} = \text{constante} \quad \text{et} \quad \vec{L}_0 \cdot \vec{u} = \text{constante}$$

Exemple: Voiture à boulet



Q: Si le boulet roule le long de la pente, que se passe-t-il?

R: Les forces extérieures sont toutes verticales. Du coup,

$$\vec{F}^{ext} \cdot \vec{x} = 0$$

$$\Rightarrow m_b v_{bx} + m_v v_{vx} = \text{constante}.$$

Si au départ les deux sont au repos, on a donc :

$$m_b v_{bx} + m_v v_{vx} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{vx} = - v_{bx} \frac{m_b}{m_v}}$$

Si on néglige les frottements, il n'y a pas de forces non conservatives qui travaillent, et l'énergie mécanique doit être conservée :

$$E = \underbrace{K_b}_{\frac{1}{2} m v_b^2} + \underbrace{K_v}_{\frac{1}{2} m v_v^2} + \underbrace{V_b}_{mgz} + \underbrace{V_v}_{0} = \text{constante}$$

Au départ, $E = mgh$

A l'arrivée, $E = \frac{1}{2} m_b v_{bx}^2 + \frac{1}{2} m_v v_{vx}^2$

($v_b = |v_{bx}|$ car le rail est horizontal en sortie).

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_v v_{vx}^2 + \frac{1}{2} m_b v_{vx}^2 \frac{m_v^2}{m_b^2} = m_b g h$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_v v_{vx}^2 \left(1 + \frac{m_v}{m_b}\right) = m_b g h$$

$$\Rightarrow v_{vx}^2 = 2gh \times \frac{m_b}{m_v\left(1 + \frac{m_v}{m_b}\right)}$$

soit $\boxed{v_v^2 = 2gh \dfrac{1}{x(1+x)}}$

avec $x = \dfrac{m_v}{m_b}$.

Cas limites :

- $m_v \gg m_b \rightarrow v_v \rightarrow 0$
- $m_b \gg m_v \rightarrow v_v \rightarrow +\infty$
- $m_v = m_b \rightarrow v_b = v_b = \sqrt{gh}$

IV - Centre de masse

Le centre de masse (aussi appelé centre de gravité ou centre d'inertie) est le barycentre des points M_i affectés des masses m_i. On le note G, et il vérifie donc :

$$\left(\sum_i m_i\right) \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$$

qu'on écrit souvent

$$\boxed{M \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}$$

avec $M = \sum_i m_i$.

Proposition : la définition de G est indépendante du point O.

Démo : $\sum_i m_i \vec{O'M_i} = \sum_i m_i (\vec{O'O} + \vec{OM_i})$

$= \sum_i m_i \vec{O'O} + \sum_i m_i \vec{OM_i}$

$= M \vec{O'O} + M \vec{OG} = M \vec{O'G}$.

Proposition :

$$M \vec{v}_G = \vec{P}$$

Démo : $M \vec{v}_G = M \frac{d \vec{OG}}{dt} = \frac{d}{dt} (M \vec{OG})$

$= \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \vec{OM_i} \right) = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P}$.

Théorème du centre de masse :

$$\boxed{M \vec{a}_G = \vec{F}^{ext}}$$

Preuve : $M \vec{a}_G = \frac{d}{dt}(M \vec{v}_G) = \frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}^{ext}$.

En d'autres termes, le centre de masse d'un système de points matériels se comporte comme un point matériel de masse $M = \sum_i m_i$ subissant toutes les forces extérieures qui s'appliquent au système. C'est cette propriété qui justifie de traiter de nombreux problèmes faisant intervenir des objets de taille non négligeable comme des points matériels.

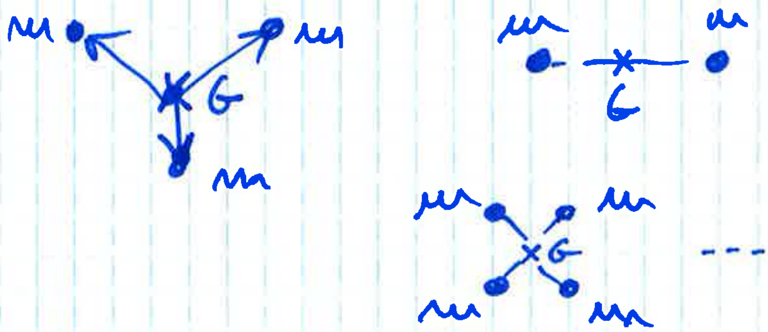
Définition alternative :

En appliquant la définition $M\vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OM_i}$ à $O = G$, il vient

$$\boxed{\sum_i m_i \vec{GM_i} = \vec{0}.}$$

Cette définition a l'avantage de ne pas faire intervenir un point O annexe, et elle permet de deviner où se situe G dans des cas simples.

Exemples :



Référentiel du centre de masse :

Le référentiel du centre masse, noté $\mathcal{R}^*$, est le référentiel qui, à l'instant t, est en translation par rapport au référentiel du laboratoire à la vitesse $\vec{v_G}$.

L'intérêt de ce référentiel est que de nombreuses lois prennent une forme plus simple dans ce référentiel.

Proposition : Dans le référentiel du centre de masse, les vitesses $\vec{v}_i^*$ satisfont :

$$\sum_i m_i \vec{v}_i^* = \vec{0}$$

Preuve : D'après les formules de changement de référentiel,

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{v}_i^*$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}_G + \sum_i m_i \vec{v}_i^*$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i}_{=\vec{P}} = \underbrace{M \vec{v}_G}_{=\vec{P}} + \sum_i m_i \vec{v}_i^*$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_i m_i \vec{v}_i^* = \vec{0}}$$

La somme des quantités de mouvement par rapport au centre de masse est nulle.

V – Problème à deux corps

On s'intéresse à deux points matériels de masse m_1 et m_2 n'étant soumis qu'aux forces internes $\vec{F}_{1\to 2}$ et $\vec{F}_{2\to 1}$.

Comme $\vec{F}^{ext} = \vec{0}$, le centre de masse G satisfait

$$M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{0}$$

Il est donc en translation uniforme par rapport au référentiel du laboratoire.

Plutôt que d'utiliser $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ pour décrire le mouvement, cela suggère de faire un changement de variables, et de remplacer $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ par

$$\begin{cases} \vec{R} = \text{position du centre de masse} \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \text{position relative} \end{cases}$$

Par définition du centre de masse, on a bien sûr

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \rightarrow \vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

Les équations du mouvement pour $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ sont données par :

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{2\to1}$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{1\to2}$$

On en déduit aisément les équations du mouvement pour $\vec{R}$ et $\vec{r}$:

$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{2\to1} + \vec{F}_{1\to2} = \vec{0}$. On retrouve le fait que $\vec{a}_G = \vec{0}$.

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_1}\vec{F}_{2\to1} - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{1\to2}$$
$$= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{2\to1}$$
$$= \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\vec{F}_{2\to1}$$

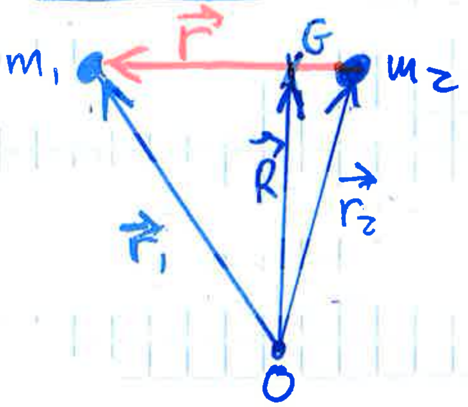
$$\Rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2\to1}$$

La quantité $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ a la dimension d'une masse. On l'appelle <u>masse réduite</u>. La position relative est donc régie par l'équation

$$\boxed{\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2\to1}}$$

$\vec{F}_{2\to1} \parallel \vec{r}$
$\to$ <u>mouvement à force centrale</u>

<u>Schéma:</u>



(<u>Gravitation :</u>
$$\vec{F}_{2\to1} = -\frac{G}{r^2}\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$)

O : origine arbitraire
$$\vec{R} = \vec{OG} = \frac{1}{M}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$$
avec $M = m_1 + m_2$.

Remarque: le mouvement se ramène à celui de deux particules effectives indépendantes:

- Une de masse $M = m_1 + m_2$, le centre de masse.
- Une de masse μ qui vérifie $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$.

La solution en termes des inconnues initiales $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ s'obtient en inversant les relations donnant $\vec{R}$ et $\vec{r}$:

$$\begin{cases} (m_1+m_2)\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m_1+m_2)\vec{R} + m_2\vec{r} = (m_1+m_2)\vec{r}_1 \\ (m_1+m_2)\vec{R} - m_1\vec{r} = (m_1+m_2)\vec{r}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{cases}$$

Exemple: Mouvement des planètes autour du soleil.

Dans le calcul fait précédemment, nous avons supposé que le soleil était immobile, et nous avons décrit le mouvement d'une planète comme celui d'un point matériel de masse

m_p. Une description plus correcte doit inclure le mouvement du soleil, et doit prendre en compte le fait qu'il est influencé par la planète.

La masse réduite est donnée par

$$\mu = \frac{m_p m_s}{m_p + m_s} = \frac{m_p}{1 + \frac{m_p}{m_s}} \simeq m_p \text{ si } m_p \ll m_s.$$

L'erreur commise est d'ordre $\frac{m_p}{m_s}$, donc très petite puisque $m_p \ll m_s$.

Dans la solution générale du problème à 2 corps, si on décrit le soleil par $(m_2, \vec{r_2})$ et la planète par $(m_1, \vec{r_1})$, on obtient:

$$\begin{cases} \vec{r_1} = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \simeq \vec{R} + \vec{r} \\ \vec{r_2} = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \simeq \vec{R} \end{cases}$$

$\vec{R}$ décrit à peu près la position du soleil, et $\vec{r}$ la position par rapport au soleil.

VI - Collisions

Si la force d'interaction est parfaitement connue, comme dans le cas de la gravitation, on peut calculer exactement les trajectoires. Si, lorsque les deux objets sont très loin l'un de l'autre, leur trajectoire relative est simplement donnée par des droits, cela veut dire que la trajectoire relative est une hyperbole ($e > 1$). On peut en déduire exactement les positions $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$.

Mais dans beaucoup de circonstances, la nature des interactions n'est pas connue en détail. Est-ce qu'on doit en déduire qu'on ne peut rien dire sur les vitesses après que les objets sont passés à proximité l'un de l'autre, voire ont été en contact ? Non. Les lois de conservation permettent d'obtenir des renseignements intéressants.

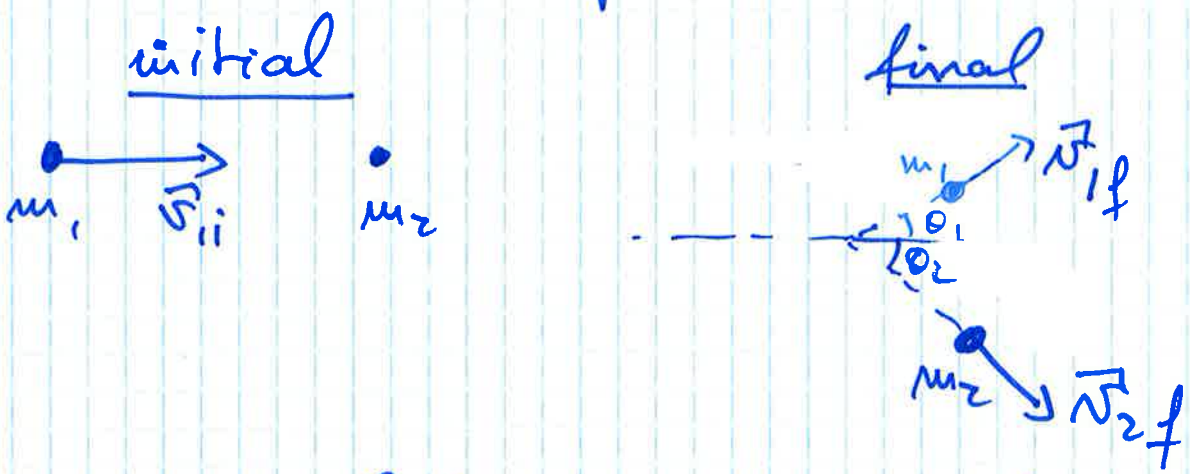
Conservation de la quantité de mouvement :

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

On peut se placer dans le référentiel où le point matériel 2 est repos, ou, de façon équivalente, supposer que $\vec{v}_{2i} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}} \quad (1)$$

Cette équation implique que ces 3 vitesses sont coplanaires.



<u>Choc élastique</u>: On dit qu'un choc est élastique si, en plus, l'énergie cinétique est conservée :

$$\boxed{\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2} \quad (2)$$

En prenant en compte le fait que le mouvement est plan, on a au total 3 équations pour 4 inconnues (v_{1f}, v_{2f}, θ_1 et θ_2). Donc on ne peut pas résoudre complètement le problème sans informations supplémentaires, mais on peut quand même obtenir des résultats généraux intéressants

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \\ 0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 v_{1i} - m_1 v_{1f} \cos\theta_1 = m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \\ m_1 v_{1f} \sin\theta_1 = m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \end{cases}$$

Somme des carrés des 2 membres :

$$v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2 v_{1i} v_{1f} \cos\theta_1 = \frac{m_2^2}{m_1^2} v_{2f}^2$$

$$(2) \Rightarrow v_{2f}^2 \frac{m_2}{m_1} = v_{1i}^2 - v_{1f}^2$$

d'où $\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) v_{1i}^2 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) v_{1f}^2 - 2 v_{1i} v_{1f} \cos\theta_1 = 0$

soit, en posant $x = \frac{v_{1f}}{v_{1i}}$,

$$\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) x^2 - 2 x \cos\theta_1 + \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) = 0$$

$$\Delta = 4 \left(\cos^2\theta_1 - 1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}\right)$$

$\boxed{m_2 > m_1}$ Δ toujours positif. La solution positive est donnée par

$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(\cos\theta_1 + \sqrt{\cos^2\theta_1 - 1 + \frac{m_2^2}{m_1^2}}\right)$$

$\boxed{m_2 < m_1}$ $\Delta > 0$ si $\cos^2\theta_1 > 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}$, et la solution est positive si $\cos\theta_1 > 0$

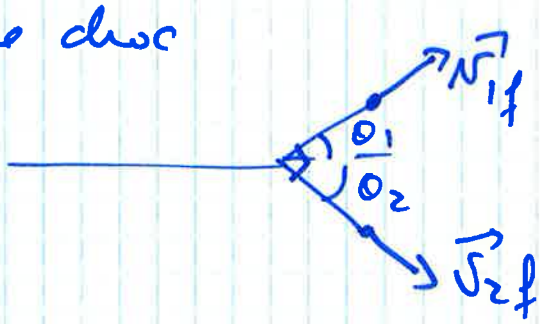
$$\Rightarrow \boxed{\theta_1 < \theta_{1\,max} < \frac{\pi}{2}, \ \sin\theta_{1\,max} = \frac{m_2}{m_1}}$$

Cas particuliers :

① $\boxed{m_1 = m_2}$ $\quad \begin{cases} \vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} \Rightarrow v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\vec{v}_{1f}\cdot\vec{v}_{2f} \\ v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{1f}\cdot\vec{v}_{2f} = 0}$$

- $\vec{v}_{1f} = \vec{0}$: échange des vitesses
- $\vec{v}_{2f} = \vec{0}$: pas de choc
- $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$



② Collision unidimensionnelle

$$\begin{cases} v_{1ix} = v_{1fx} + \frac{m_2}{m_1} v_{2fx} \\ v_{1ix}^2 = v_{1fx}^2 + \frac{m_2}{m_1} v_{2fx}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1ix} - v_{1fx} = \frac{m_2}{m_1} v_{2fx} \\ v_{1ix}^2 - v_{1fx}^2 = \frac{m_2}{m_1} v_{2fx}^2 \end{cases}$$

Solution 1 : $v_{1ix} = v_{1fx}$, $v_{2fx} = 0$ $\rightarrow$ pas de choc

Solution 2 :

$$v_{1ix}^2 - v_{1fx}^2 = (v_{1ix} + v_{1fx})(v_{1ix} - v_{1fx}) = \frac{m_2}{m_1} v_{2fx}^2$$

$$\Rightarrow v_{1ix} + v_{1fx} = \frac{m_2}{m_1} v_{2fx}^2 \frac{m_1}{m_2 v_{2fx}} = v_{2fx}$$

Du coup, $2 v_{1ix} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) v_{2fx} \Rightarrow \boxed{v_{2fx} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1ix}}$

$$2 v_{1fx} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) v_{2fx} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1ix}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{1fx} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1ix}}$$

Cas limites :

- $m_1 = m_2$: $v_{1fx} = 0$, $v_{2fx} = v_{1ix}$

  → échange des vitesses.

- $m_1 \ll m_2$: $v_{1fx} = -v_{1ix}$ et $v_{2fx} = 0$

  → rebond sur une masse infinie

- $m_1 \gg m_2$: $v_{1fx} = v_{1ix}$ et $v_{2fx} = 2v_{1ix}$

  → la particule incidente continue à la même vitesse, la particule légère continue à 2 fois la vitesse. C'est logique. Dans le référentiel de la particule m_1, la particule m_2 rebondit

$$\begin{cases} \text{vitesse initiale : } v'_{2ix} = -v_{1ix} \\ \text{vitesse finale : } v'_{2fx} = v_{1ix} \end{cases}$$

Choc inélastique :

Lorsque l'énergie cinétique n'est pas conservée, on parle de choc inélastique. De l'énergie est dissipée lors du choc sous forme de chaleur.

Cas particulier : choc mou. Les deux points matériels restent accrochés après le choc : $\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{V}$

La conservation de la quantité de mouvement implique :

$$m_1 \vec{v}_{1i} = (m_1 + m_2)\vec{V}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{1i}}$$

<u>Remarque :</u> $\vec{V}$ est la vitesse du centre de masse puisque la quantité de mouvement totale est donnée par $(m_1 + m_2)\vec{V}$.

Au cours d'un tel choc, l'énergie cinétique diminue. En effet

$$K_i - K_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} v_{1i}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m_1 - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 > 0$$

Cette énergie s'est transformée en chaleur lors du choc.

VII - Système de masse variable

Un problème apparenté est celui où un système expulse de la masse. Le cas typique est celui d'une fusée qui expulse du gaz à une vitesse $\vec{u} = -u\hat{z}$.

$$\vec{p}(t) = m(t)\,\vec{v}(t)$$

$$\vec{p}(t+\delta t) = \underbrace{(m+\delta m)}_{\substack{\text{masse de la fusée à l'instant}\\ t+\delta t\ (\delta m<0)}}\underbrace{(\vec{v}+\delta\vec{v})}_{\substack{\text{vitesse de la fusée à}\\ \text{l'instant } t+\delta t}}\underbrace{-\delta m}_{\substack{\text{masse de gaz}\\ \text{éjectée}}}\overbrace{(\vec{v}+\vec{u})}^{\text{vitesse du gaz éjecté}}$$

$$\vec{p}(t+\delta t) - \vec{p}(t) \simeq \delta m\,\vec{v} + m\,\delta\vec{v} - \delta m\,\vec{v} - \delta m\,\vec{u}$$

$$= m\,\delta\vec{v} - \vec{u}\,\delta m$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{p}(t+\delta t) - \vec{p}(t)}{\delta t} = m\frac{\delta\vec{v}}{\delta t} - \vec{u}\frac{\delta m}{\delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{u}$$

Or, $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{ext} = +m\vec{g}$

$$\Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \dot{m}\,\vec{u}$$

Si on projette suivant z vertical, il

vient : $m\dfrac{dv}{dt} = -mg - \dot{m}u$

car $\vec{g}$ et $\vec{u}$ sont orientés vers le bas

La condition de décollage $\dfrac{dv}{dt} > 0$ impose

$$-mg - \dot{m}u > 0$$

$$\Rightarrow \quad -\dot{m}u > mg$$

$$\Rightarrow \quad |\dot{m}|u > \underbrace{mg}_{\text{poids}}$$

L'équation peut se réécrire :

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{\dot{m}}{m}u$$

d'où, si $v(0) = 0$,

$$\boxed{v(t) = \ln\frac{m(0)}{m(t)}\,u - g\,t}$$

où on a supposé que la vitesse d'éjection u est constante.