Chapitre IV – Forces – Travail – Energie

I – Les différents types de force

Un objet en interaction avec son environnement peut être soumis à de nombreux types de force.

1) Interaction à distance entre particules.

L'exemple le plus évident, c'est la gravitation entre deux particules massives.

$$\vec{F}_{2\to1} = G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

Mais ce n'est en général pas la seule force entre particules. Par exemple, si deux particules portent des charges q_1 et q_2, elles interagissent par la force de Coulomb :

$$\vec{F}_{2\to1} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

C'est une interaction attractive si les charges sont de signes opposés ($q_1 q_2 < 0$) et répulsive si les charges sont de même signe ($q_1 q_2 > 0$).

Plus généralement, des particules chargées en mouvement créent un champ électromagnétique défini par un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$. Une particule de charge q placée dans un tel champ est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

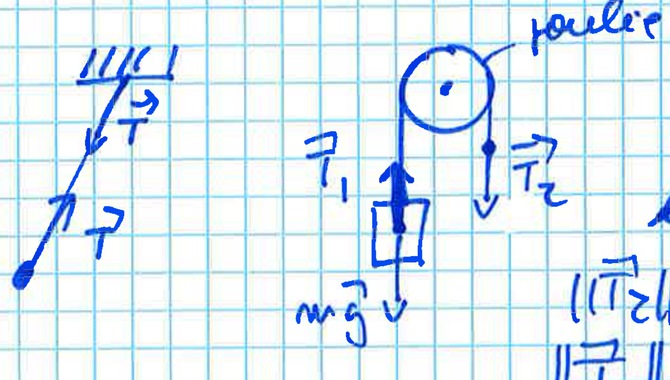
2) Forces de rappel

Nous avons déjà vu qu'un ressort exerce une force de rappel proportionnelle à l'allongement :

$$\|\vec{F}\| = k(l - l_0) \quad \text{(loi de Hooke)}$$

et dirigée le long du ressort.

Un fil inextensible de masse négligeable exerce aussi une force de rappel dirigée le long du fil. Cette force est appelée tension. Son intensité est la même en tout point du fil :

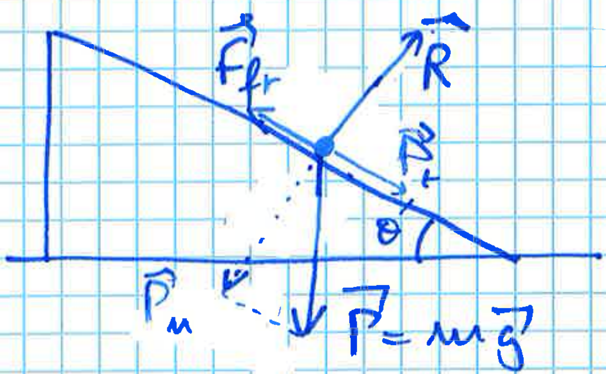


$\|\vec{T}_2\| = \|\vec{T}_1\|$. Du coup, la masse monte si $\|\vec{T}_2\| > mg$ et descend si $\|\vec{T}_2\| < mg$.

3) Forces de contact avec un solide

Lorsqu'un objet est en contact avec un support, il subit deux forces :

- La réaction $\vec{R}$, qui correspond à la composante perpendiculaire au support.
- Une force de frottement qui s'oppose au mouvement ou autres forces, et qui correspond à la composante tangentielle. Elle est souvent notée $\vec{F}_{fr}$.



$$\vec{P} = \underset{\text{normale}}{\vec{P}_n} + \underset{\text{tangentielle}}{\vec{P}_t}$$

La réaction $\vec{R}$ est simplement opposée aux forces normales au support qui attirent l'objet vers le support. Dans le cas du plan incliné, son intensité est donc donnée par

$$\|\vec{R}\| = mg\cos\theta.$$

La force de frottement dépend des circonstances. Si l'objet est au repos (cas <u>statique</u>), elle s'oppose simplement aux forces tangentielles qui agissent sur l'objet. Mais son intensité est limitée :

$$\|\vec{F}_{fr}\| \leq \mu_s R$$

où μ_s est le <u>coefficient de frottement statique</u> et $R = \|\vec{R}\|$ l'intensité de la réaction.

Dans le cas du plan incliné, la force tangentielle est la composante du poids parallèle au plan incliné, d'intensité

$$\|\vec{P}_t\| = mg \sin\theta.$$

L'objet ne pourra être au repos tant que $\vec{F}_{fr} + \vec{P}_t = 0$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{F}_{fr}\| = mg \sin\theta$$

Cela n'est possible que si

$$\|\vec{F}_{fr}\| = mg \sin\theta \leq \mu_s R = \mu_s mg \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta \leq \mu_s \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{tg}\theta \leq \mu_s}$$

Cette inégalité permet de mesurer μ_s. En effet, si on change l'inclinaison du support, l'objet restera immobile tant que $tg\,\theta \leq \mu_s$. L'angle θ_s pour lequel il décroche permet de déduire μ_s puisque pour cet angle

$$\boxed{\mu_s = tg\,\theta_s}$$

Si l'objet est en mouvement, il subit une force de frottement dont l'intensité est simplement proportionnelle à la réaction :

$$\|\vec{F}_{fr}\| = \mu_c \, \|\vec{R}\|$$

μ_c est le coefficient de <u>frottement cinétique</u>

En général, $\mu_c < \mu_s$.

Pour mesurer μ_c, il suffit de déterminer l'angle θ_c pour lequel la vitesse est constante. Dans ce cas, l'accélération tangentielle est nulle, et la force de frottement est juste l'opposée de la composante tangentielle du poids :

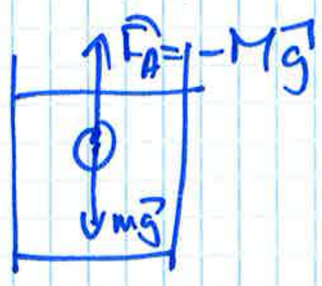
$$\|\vec{F}_{fr}\| = \mu_c \|\vec{R}\| = \|\vec{P}_t\|$$

$$\Rightarrow \mu_c\, mg \sin\theta_c = mg \cos\theta_c \Rightarrow \boxed{\mu_c = tg\,\theta_c}$$

4) Forces exercées par un fluide

Un objet plongé dans un fluide subit deux forces de la part du fluide.

- La poussée d'Archimède : Un corps plongé dans un fluide est soumis de la part du fluide à une force opposée à celle à laquelle serait soumis un objet de même volume rempli de fluide. Dans le champ de pesanteur, cette force est verticale ascendante, et d'intensité $\|\vec{F}_A\| = Mg$, où M est la masse de fluide déplacée :



- Une force de frottement fluide : cette force s'annule lorsque la vitesse tend vers 0. On s'attend donc à ce que son intensité soit proportionnelle à v^α, $\alpha > 0$.

Dans le régime dit laminaire, lorsque la vitesse n'est pas trop grande, on a :

$$\vec{F}_{fr} = -b_e \vec{v}$$

C'est ce que nous avons utilisé pour le mouvement balistique avec frottement.

Dans le régime turbulent, qui apparaît lorsque la vitesse est grande, le frottement augmente avec une puissance plus grande. On utilise souvent la forme

$$\vec{F}_{fr} = -b_t v^2 \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

II - Impulsion, puissance, travail

Lorsqu'un objet est soumis à une force $\vec{F}(t)$ au cours de son mouvement, il est très utile d'introduire trois quantités associées à cette force.

1) Impulsion

L'impulsion reçue par un objet entre les instants t_1 et t_2 est définie par :

$$\vec{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt$$

Unité : $[N.s]$ ou $[kg.m.s^{-1}]$

Si $\vec{F}$ est indépendante du temps, l'impulsion est simplement proportionnelle à l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t$$

<u>Proposition</u> : Si $\vec{F}$ désigne la force totale à laquelle est soumis le point matériel,

$$\vec{I}_{12} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \Delta\vec{p}$$

où $\vec{p}(t) = m\,\vec{v}(t)$ est la quantité de mouvement du point matériel.

<u>Démonstration</u> : D'après le principe fondamental, $\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

Ainsi, $\vec{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt}\,dt$

Considérons une composante, par exemple p_x :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dp_x}{dt}\,dt = p_x(t_2) - p_x(t_1)$$

puisque p_x est une primitive de $\frac{dp_x}{dt}$.

Il en va de même pour les autres composantes, d'où le résultat annoncé.

2) <u>Puissance</u>:

La puissance d'une force est définie par le produit de la force par la vitesse :

$$P(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

Elle est mesurée en Watt [W]. C'est une mesure de la quantité d'énergie par unité de temps qu'un système peut recevoir (voir travail ci-dessous).

Exemples:

① Puissance du poids : $P = m\vec{g}\cdot\vec{v}$.
La puissance est maximale si le mouvement est vertical; elle est nulle si le mouvement est horizontal.

② Puissance de la force de frottement fluide :

$$P = -b\vec{v}\cdot\vec{v} = -b\,v^2 < 0$$

La puissance est négative : une telle force prend de l'énergie au système.

3) Travail

Pour quantifier la quantité d'énergie reçue par un système, il suffit d'intégrer la puissance entre deux instants :

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)\,dt$$

W s'appelle le travail de la force (W = "work" en anglais).

<u>Proposition</u> : Si $\vec{F}$ désigne la force totale à laquelle est soumis le point matériel,

$$W_{12} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

<u>Démonstration</u> : D'après le principe fondamental, $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\Rightarrow W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}(t)\, dt$$

Mais $\vec{v}^2(t) = v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{v}^2(t) = 2 \frac{dv_x}{dt} v_x + 2 \frac{dv_y}{dt} v_y + 2 \frac{dv_z}{dt} v_z$$

$$= 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}(t)$$

Du coup,

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \vec{v}^2(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\vec{v}^2(t))\, dt$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\vec{v}^2(t) \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$= \frac{1}{2} m v(t_2)^2 - \frac{1}{2} m v(t_1)^2.$$

Au vu de ce résultat, il est utile d'introduire l'énergie cinétique par :

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (K : \text{"kinetic"})$$

Avec cette définition, la proposition peut se reformuler de la façon suivante :

Théorème de l'énergie cinétique :

$$W_{12} = K_2 - K_1.$$

Le travail des forces est égal à la variation d'énergie cinétique.

Unités : Le travail et l'énergie se mesurent en Joule [J], dont la dimension est [N. m] ou [Kg. m^2. s^{-2}].

Puissance et énergie cinétique : d'après ce qui précède, on a :

$$\boxed{P(t) = \frac{dK}{dt}}$$

La puissance est de ce fait aussi exprimée en [J. s^{-1}].

Travail et déplacement : l'expression

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) \, dt$$

est tout à fait générale, et elle s'applique même au cas où les composantes de la force dépendent des positions, des vitesses et du temps:

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \Big[F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\,\dot{x}(t) + F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\,\dot{y}(t) + F_z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\,\dot{z}(t) \Big] dt$$

Dans le cas très fréquent où la force ne dépend pas des vitesses ni du temps, le travail prend une forme plus simple et plus intuitive:

$$W_{AB} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \; ; \quad \mathcal{C} : \text{chemin de } A \text{ à } B$$

En particulier, si la force est uniforme,

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

III - <u>Forces conservatives - Energie potentielle</u>

Considérons une force $\vec{F}(\vec{r})$ qui ne dépend que de $\vec{r}$. Cette force est dite <u>conservative</u> si son travail ne dépend pas du chemin suivi. On peut montrer que cela implique qu'il existe une fonction de l'espace appelée <u>énergie potentielle</u> $V(\vec{r})$ telle que:

$$W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

Cela implique en particulier que le travail d'une force conservative le long d'une trajectoire fermée est nul.

Exemples: ① Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ est uniforme. Du coup, le travail est donné par

$$W_{AB} = \vec{P} \cdot \vec{AB}$$

Il ne dépend que du vecteur $\vec{AB}$, donc il ne dépend pas du chemin suivi.

② Les forces de frottement ne sont pas conservatives. En effet, la puissance est strictement négative, comme nous l'avons vu dans le cas du frottement fluide dans le régime laminaire:

$$\vec{F} = -b\vec{v} \Rightarrow P = -bv^2 < 0.$$

Du coup, le travail d'une force de frottement est strictement négatif, et il ne peut pas s'annuler le long d'une boucle.

Proposition:

Si une force est conservative, elle est reliée à l'énergie potentielle par

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

où le symbole $\vec{\nabla}$ est appelé <u>gradient</u> ou Nabla, et est défini par

$$\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On dit que $\vec{F}$ dérive du potentiel $V(\vec{r})$ (où, par abus de langage on parle souvent de <u>potentiel</u> pour l'énergie potentielle).

<u>Justification:</u>

Supposons que l'intégrale d'une fonction f soit donnée par

$$\int_a^b f(x)\,dx = V(a) - V(b)$$

On a par ailleurs, pour toute primitive F de f,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

On en déduit que $-V$ est une primitive de f, et donc que $f = -\frac{dV}{dx}$.

Dans le cas présent, le travail peut s'exprimer comme

$$W = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Proposition: Si $\vec{F}(\vec{r})$ est conservative, son rotationnel est nul :

$$\vec{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

avec

$$\vec{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Preuve: $\dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} = 0$

car pour toute fonction de deux variables, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Idem pour les autres composantes.

NB: On peut démontrer que toutes ces propriétés sont équivalentes, c'est-à-dire qu'une force $\vec{F}(\vec{r})$ est conservative si et seulement si elle satisfait l'une des propriétés suivantes :

- Il existe une fonction $V(\vec{r})$ telle que
$$W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$
- Il existe une fonction $V(\vec{r})$ telle que
$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$
- Le travail de $\vec{F}$ ne dépend pas du chemin suivi.
- Le travail de $\vec{F}$ est nul pour une trajectoire fermée.
- $\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{F} = \vec{0}$.

<u>Théorème de l'énergie mécanique:</u>

Pour une force conservative, l'<u>énergie mécanique</u> définie comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est conservée :
$$E = V + K = \text{constante}.$$

<u>Preuve:</u> Nous avons vu que, de façon tout à fait générale,
$$W_{12} = K_2 - K_1.$$

Or, pour une force conservative, on a aussi :
$$W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \equiv V_1 - V_2$$

On en déduit que :

$$K_2 - K_1 = V_1 - V_2$$

$$\Rightarrow \quad V_1 + K_1 = V_2 + K_2 \, .$$

L'énergie mécanique est un exemple d'intégrale première, c'est-à-dire d'une quantité conservée au cours du temps. Ces intégrales premières sont très utiles car elles correspondent à avoir intégré une fois les équations du mouvement. Elles ne font intervenir que les dérivées premières.

Exemples :

① Le champ de pesanteur :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$$

On peut donc choisir comme énergie potentielle

$$V(\vec{r}) = mgz \, .$$

En effet, $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$, et $\frac{\partial V}{\partial z} = -mg$.

Pour un mouvement vertical, le théorème de l'énergie mécanique conduit à :

$$mgz + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 = \text{constante.}$$

Si on dérive cette équation par rapport au temps, il vient :

$$mg\dot{z} + m\dot{z}\ddot{z} = 0$$

En divisant par $\dot{z}$, on obtient :

$$m\ddot{z} = -mg$$

On retrouve le principe fondamental.

② Force de rappel :

Dans le cas de la force de rappel d'un ressort, on a vu qu'elle s'exprimait comme

$$F_z = -kz$$

si on prend $z = 0$ comme la position d'équilibre.

On peut donc choisir comme potentiel $V(z) = \frac{1}{2} k z^2$.

Le théorème de l'énergie mécanique conduit à :

$$\frac{1}{2} k z^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 = \text{constante}$$

$$\Rightarrow m\ddot{z}\dot{z} = -k\dot{z}z \Rightarrow m\ddot{z} = -kz.$$

3 <u>Force centrale</u> : La force exercée par une particule sur une autre du fait de la gravitation ou de la force de Coulomb est de la forme

$$\vec{F} = -\frac{C}{r^2}\,\vec{e}_r$$

où on a pris comme origine la particule qui exerce une force sur l'autre. La constante C est positive pour la gravitation, mais elle peut être positive ou négative pour la force de Coulomb.

Or, en coordonnées sphériques, la vitesse est donnée par

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\phi$$

Du coup, la puissance est donnée par

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = -\frac{C}{r^2}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{C}{r}\right)$$

Le travail est donc donné par

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{C}{r}\right)dt = \frac{C}{r_2} - \frac{C}{r_1}$$

Or, par définition de l'énergie potentielle,

$W_{12} = V_1 - V_2$ $\longrightarrow$ $\boxed{V(\vec{r}) = -\frac{C}{r}}$ Il ne dépend que de r.

Le théorème de l'énergie mécanique permet de répondre de façon très économique à des questions faisant intervenir la vitesse.

Exemple : On laisse tomber un objet d'une hauteur h sans vitesse initiale. Quelle est la vitesse lors de l'impact ?

Réponse : $mgz + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 = E$ (E : constante)

A $t=0$, $z = h$ et $\dot{z} = 0 \Rightarrow E = mgh$

Au moment de l'impact, $z = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{z}^2 = mgh$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{z} = \sqrt{2gh}}$$

IV - Equilibres stables et instables

Lorsqu'un système est soumis à des forces conservatives, l'énergie potentielle permet une discussion très intéressante de la notion d'équilibre et de la stabilité des points d'équilibre.

Considérons l'exemple d'un point matériel se déplaçant dans un potentiel unidimensionnel $V(x)$.

Le point matériel est soumis à une force $\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -V'(x)\,\vec{i}$. Il sera immobile si et seulement si la force qui s'exerce sur lui est nulle, c'est-à-dire si

$$V'(x) = 0.$$

C'est la condition de l'équilibre du point matériel. On voit donc que les positions d'équilibre correspondent aux minima et aux maxima du potentiel.

Soit x_0 un point d'équilibre, donc un point tel que $V'(x_0) = 0$. Essayons d'évaluer la force pour x proche de x_0. On peut écrire :

$$\vec{F} = -V'(x)\,\vec{i}.$$

Mais, comme x est supposé proche de x_0, on peut faire un développement limité autour de x_0 :

$$V'(x) = V'(x_0) + V''(x_0)(x - x_0) + \cdots$$
$$= V''(x_0)(x - x_0) + \cdots$$

puisque $V'(x_0) = 0$.

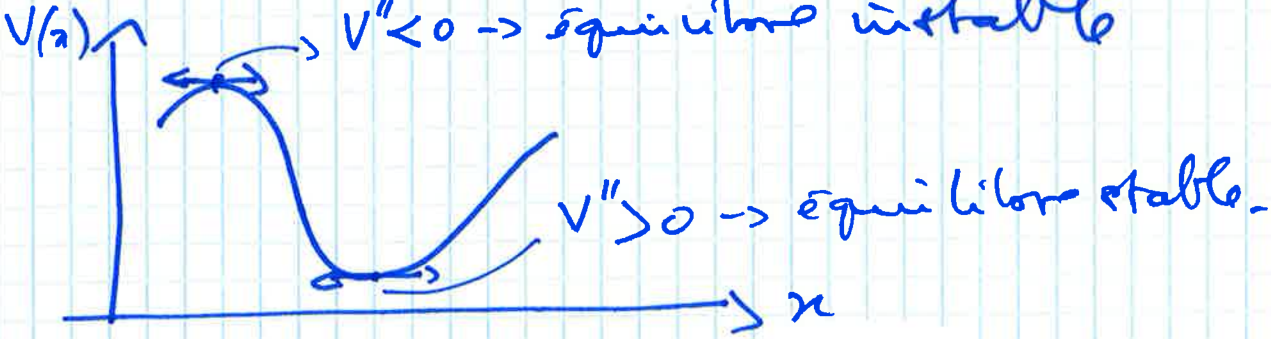
Ainsi, $\vec{F} = -V''(x_0)(x - x_0)\,\vec{i}$. Deux cas de figure se présentent :

① $V''(x_0) > 0$. La force tend à ramener

x vers x_0. C'est une force de rappel. On dit que l'équilibre est <u>stable</u>.

② $V''(x_0) < 0$. La force tend à éloigner le point matériel de la position d'équilibre. On dit que l'équilibre est <u>instable</u>.

Résumons sur un graphe :



Le concept d'énergie potentielle permet d'éclairer la nature du mouvement autour d'une position d'équilibre stable. En effet, d'après le théorème de l'énergie mécanique,

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E$$

où E, l'énergie du système, est une constante.

Cette équation ne peut être satisfaite que si $V(x) \leq E$. Deux cas de figure se présentent :

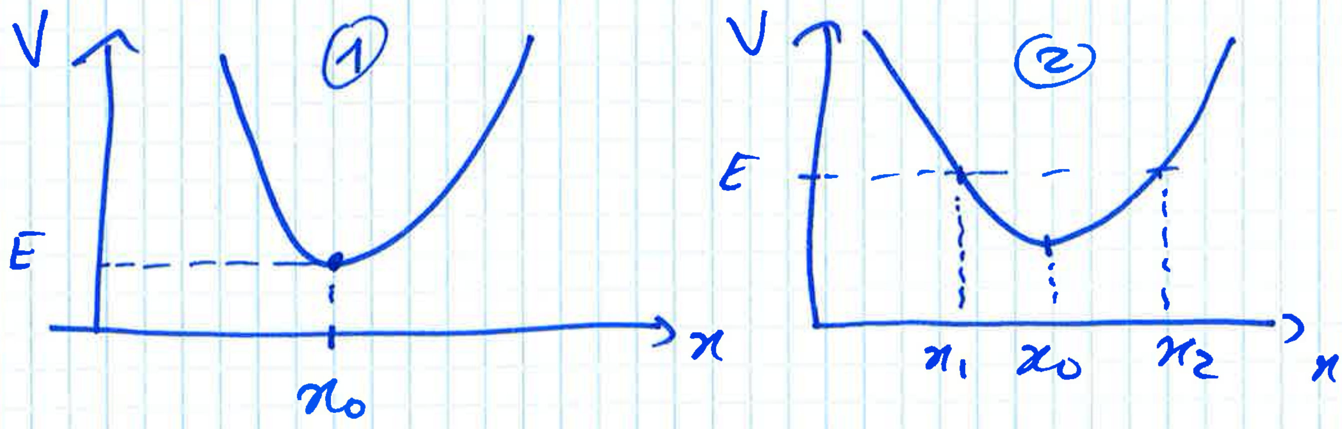
① $V(x_0) = E$. Dans ce cas, la vitesse

est nulle, et c'est un point d'équilibre. On retrouve le fait qu'un minimum de V correspond à 1 point d'équilibre.

② $E > V(x_0)$. Dans ce cas, le point matériel va osciller entre les points x_1 et x_2 définis par :

$$V(x_1) = E, \quad V(x_2) = E, \qquad x_1 < x_0 < x_2 .$$

En effet, quand le point matériel atteint x_1 ou x_2, l'énergie cinétique s'annule, et la force de rappel ramène le point matériel vers x_0.



La période peut s'exprimer simplement en fonction de $V(x)$. En effet, la conservation de l'énergie mécanique conduit à

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}$$

ou encore

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}} = 1$$

soit $F(x)$ une primitive de $\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}$,
c'est-à-dire une fonction telle que

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}$$

Le membre de gauche est donné par.

$$\frac{d}{dt} F(x) = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} = F'(x)\,\dot{x} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}$$

Du coup,

$$F(x_2) - F(x_1) = t_2 - t_1 .$$

soit $\int_{x_1}^{x_2} F'(x)\,dx = t_2 - t_1$

d'où $t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}}$

La période est égale au double du temps pour aller de x_1 à x_2

$$\rightarrow \quad T = \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}}$$

Dans le cas des petites oscillations, on peut limiter le développement de $V(x)$ au deuxième ordre :

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)\,(x - x_0)^2$$

Dans ce cas, on sait que la période est donnée par

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}$$

puisque l'équation est la même que pour un ressort de raideur $k = V''(x_0)$.
Ce résultat peut se retrouver aisément via la formule générale. Posons en effet $x_0 = 0$, $V(x_0 = 0)$. Comme le mouvement est symétrique pour les oscillations harmoniques,

$$T = 2\sqrt{2m} \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

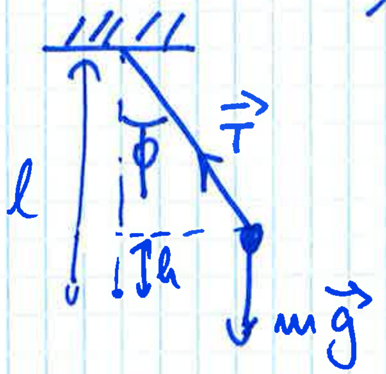
avec $V(x) = \frac{1}{2} V'' x^2$ et $E = \frac{1}{2} V'' x_1^2$, d'où

$$T = 2\sqrt{2m} \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{V''}{2}}\,\sqrt{x_1^2 - x^2}}$$

$$= 2\sqrt{2m}\,\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{V''}} \underbrace{\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x_1^2 - x^2}}}_{= \left[\operatorname{Arcsin} \frac{x}{x_1}\right]_0^{x_1} = \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''}}.$$

Exemple : Considérons de nouveau le pendule simple. Comme la tension est le long du fil, donc perpendiculaire à la vitesse, elle ne travaille pas, et la seule source d'énergie potentielle est le poids :



$$V = mgh.$$

L'énergie cinétique est donnée par $\frac{1}{2}mv^2$ avec $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z$

(Attention : on est en coordonnées cylindriques, et z est perpendiculaire au plan du pendule $\to \dot{z} = 0$).

Comme $r = l = \text{cste}$, $\vec{v} = l\dot{\phi}\vec{e}_\phi$, et l'énergie cinétique est donnée par

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2$$

Pour l'énergie potentielle, on peut l'exprimer en fonction de ϕ en prenant comme référence $V(\phi=0) = 0$

$$\to V(\phi) = mgl(1 - \cos\phi)$$

Les positions d'équilibre sont données par $V'(\phi) = 0 \Rightarrow mg\sin\phi = 0$

$\Rightarrow \phi = 0$ ou π.

Par ailleurs, $V''(\phi) = mg\cos\phi$

$V''(\phi = 0) > 0 \Rightarrow$ équilibre stable

$V''(\phi = \pi) < 0 \Rightarrow$ équilibre instable.

La période des oscillations autour de la position d'équilibre s'obtient en suivant le même raisonnement que précédemment:

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 + mgl(1 - \cos\phi) = E$$

Pour un mouvement d'amplitude ϕ_1,
$E = mgl(1 - \cos\phi_1)$

or $$\dot{\phi}^2 = \frac{2mgl}{ml^2}(\cos\phi - \cos\phi_1)$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_1}$$

$$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\phi_1}\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_1}}$$

C'est une intégrale dite intégrale elliptique de première espèce qui n'a pas de solution compacte simple. Le résultat dépend de ϕ_1, et pour ϕ_1 petit il prend la forme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{\phi_1^2}{16}+\cdots\right)$$

On retrouve le résultat $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ pour les petites oscillations, mais la période dépend de l'amplitude des oscillations, contrairement au cas du ressort.

V - Frottements et théorème de l'énergie

Supposons qu'un système soit soumis à des forces conservatives et des forces non conservative. D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$K_2 - K_1 = W_{12} = W_{12}^{C} + W_{12}^{NC}$$

où W_{12}^{C} est le travail des forces conservatives et W_{12}^{NC} le travail des forces non conservatives.

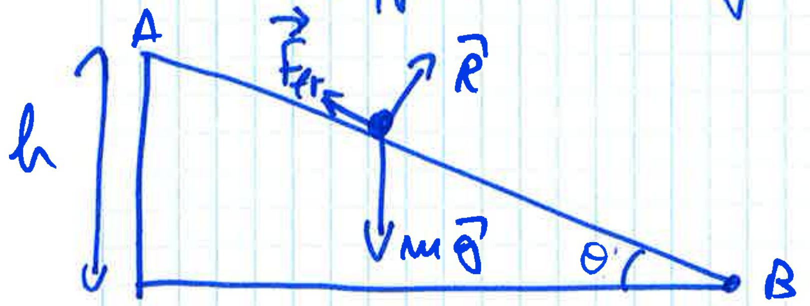
Or, le travail des forces conservatives s'exprime à l'aide d'une énergie potentielle : $W_{12}^{C} = V_1 - V_2$

$$\Rightarrow K_2 + V_2 - K_1 - V_1 = W_{12}^{NC}$$

soit $\boxed{E_2 - E_1 = W_{12}^{NC}}$

La variation d'énergie mécanique $E = K + V$ est égale au travail des forces non conservatives.

<u>Exemple</u>: Un lugeur part d'une hauteur h sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale. On se propose de trouver sa vitesse finale en fonction du coefficient de frottement μ_c.



On a déjà vu que $\|\vec{R}\| = mg\cos\theta$, et donc que $\|\vec{F}_{fr}\| = mg\mu_c\cos\theta$. L'intensité et la direction de $\vec{F}_{fr}$ sont constantes pour ce parcours, et donc

$$W^{fr} = \vec{F}_{fr} \cdot \vec{AB} = -mg\cos\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta}\mu_c$$

Par ailleurs, l'énergie potentielle est donnée par $V = mgh$ au départ et 0 à l'arrivée.

Finalement, $K_A = 0$, $K_B = \frac{1}{2}mv^2$, $V_A = mgh$, $V_B = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - mgh = -mg\frac{h}{\tan\theta}\mu$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh\left(1 - \frac{\mu_c}{\tan\theta}\right)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu_c}{\tan\theta}\right)}$$

Remarques:

① En l'absence de frottements ($\mu_c = 0$), on retrouve $v = \sqrt{2gh}$

② Les frottements diminuent la vitesse finale.

③ La condition $1 - \frac{\mu_c}{\tan\theta} > 0$ est équivalente à

$$\tan\theta > \mu_c .$$

Or, pour que le mouvement démarre, il faut que $\tan\theta > \mu_s$; où μ_s est le coefficient de frottement statique, et on a de façon générale $\mu_s > \mu_c$. Donc la condition $\tan\theta > \mu_c$ est bien vérifiée.