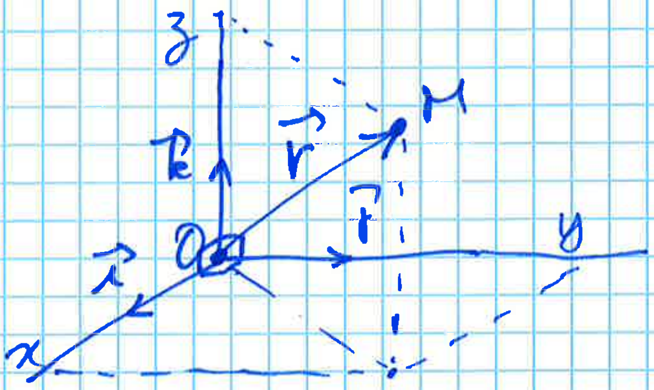
Chapitre I - Lois de Newton et balistique

I - Introduction

Les objets étudiés en mécanique sont caractérisés avant tout par leur masse m, mais ils ont toujours une certaine extension dans l'espace (bille, dé, ...). Dans beaucoup de circonstances, la taille et la forme précise de ces objets est sans importance, et le mouvement peut être décrit par la position d'un point de référence, par exemple son centre pour une bille. Ceci conduit au concept de point matériel, un objet de masse m et d'extension nulle. (Cette approximation consiste à ignorer la possibilité pour un objet de tourner sur lui-même et décrit de façon rigoureuse le déplacement du centre de masse considéré comme un point matériel de masse m. Nous y reviendrons lors de l'étude du mouvement des solides).

La position d'un point matériel est repérée par un point M dans l'espace à 3 dimensions. Supposons que cet espace soit doté d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A tout point M, on peut associer le vecteur $\overrightarrow{OM}$. On notera souvent ce vecteur $\vec{r} \equiv \overrightarrow{OM}$.



Les coordonnées du point M dans ce repère sont définies par les composantes du vecteur $\vec{r}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\overrightarrow{OM} \equiv \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Elles sont souvent notées (x, y, z).

Lorsque qu'un point matériel est en interaction avec son entourage, sa position évolue au cours du temps. Cette évolution est donc naturellement décrite par une fonction $M(t)$ qui à chaque instant t associe un point de l'espace, ou de façon équivalente par un vecteur $\vec{r}(t)$. Le but de la mécanique est de calculer $\vec{r}(t)$ dans différentes circonstances. Cette fonction est parfois appelée <u>équation horaire</u>.

II - Les lois de Newton :

Pour formuler les lois de Newton, il est utile d'introduire les dérivées par rapport au temps du vecteur position :

Vitesse : $\boxed{\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}}$

Comme $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$, on a :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k}.$$

En mathématiques, il est usuel de noter la dérivée d'une fonction $f(t)$ par $f'(t)$. En mécanique (et d'autres branches de la physique), la dérivée est notée avec un point au-dessus de la lettre désignant la fonction :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t), \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}(t), \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z}(t)$$

et pour un vecteur

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t).$$

Ainsi, $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} + \dot{z}(t)\,\vec{k}$

Accélération : $\boxed{\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}}$

Comme $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, on a :

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

d'où $\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$.

De même qu'on note les dérivées premières avec un point, on note les dérivées secondes avec deux points:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t), \ldots$$

Ainsi, $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$

Enfin, un point matériel n'est pas simplement caractérisé par sa position, mais également par sa masse m. La formulation de nombreuses propriétés se fait de façon plus compacte en termes du produit de la vitesse par la masse appelé <u>quantité de mouvement</u> et noté $\vec{p}$:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

En 1666, Newton a rationalisé de nombreuses observations à l'aide de 3 lois.

1ère loi de Newton : (principe d'inertie)

Un point matériel isolé est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme ($\vec{v}$ = constante).

2ème loi de Newton :

Si, du fait de ses interactions avec l'extérieur, un point matériel est soumis à une force $\vec{F}$, son mouvement est régi par l'équation

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$ (principe fondamental)

Si sa masse est constante, cette équation prend la forme

$$\boxed{\vec{F} = m\,\vec{a}}$$

3ème loi de Newton :

Si un corps 1 exerce sur un corps 2 une force $\vec{F}_{1\to 2}$, le corps 2 exerce sur le corps 1 une force $\vec{F}_{2\to 1}$ qui lui est opposée :

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$$ (principe d'action et réaction)

Ces lois appellent de nombreux commentaires. En réalité, une bonne partie du cours va consister à donner un sens plus précis à ces lois.

La première loi se base sur l'observation qu'un objet posé sur une table ne bouge pas, et que si on lui donne une impulsion sa vitesse sera constante si les frottements sont négligeables. Elle sous-entend que si on prend la terre comme référence, cette loi est valable. Or, comme nous le verrons, ce n'est pas rigoureusement vrai. Si on prend le soleil comme référence, la terre tourne autour du soleil et sur elle-même. La première loi s'appliquera de façon plus précise dans un <u>référentiel</u> lié au soleil (quoique non rigoureuse car le système solaire tourne lui-même au sein de la galaxie ...), mais il y aura des corrections mesurables si on se place dans un référentiel lié à la terre. (Un référentiel est défini par un ensemble de 4 points non coplanaires dont les positions relatives ne changent pas au cours du temps).

Du coup, la première loi de Newton peut être prise comme la définition d'un <u>référentiel inertiel</u>, c'est-à-dire un référentiel où elle s'applique. Nous verrons plus tard comment les autres lois sont modifiées lorsqu'on passe dans un référentiel non inertiel.

Dans la deuxième, la force $\vec{F}$ peut être la somme de plusieurs forces élémentaires. Par exemple, un objet posé sur une table est soumis à son poids et à la réaction de la table. La somme des deux s'annule, et il ne bouge pas. Déterminer les forces auxquelles un point matériel est soumis est une partie importante du problème à résoudre.

Par ailleurs, cette loi est formulée comme une <u>équation différentielle</u>, c'est-à-dire une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui intervenir des dérivées de cette fonction. C'est particulièrement clair pour un point matériel de masse m constante puisque cette loi se récrit

$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

ou encore, en posant $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$,

$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ F_y = m\ddot{y} \\ F_z = m\ddot{z} \end{cases}$$

Les forces peuvent elles-mêmes dépendre de la position, de la vitesse et du temps, ce qui conduit à un système de 3 équations différentielles couplées:

$$\begin{cases} F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\ddot{x} \\ F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\ddot{y} \\ F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = m\ddot{z} \end{cases}$$

Une bonne partie du cours va consister à formuler ces équations différentielles, puis à les résoudre.

Notons enfin que cette loi, d'abord formulée pour calculer $\vec{r}(t)$ connaissant $\vec{F}$, peut aussi être utilisée pour calculer $\vec{F}$ connaissant $\vec{r}(t)$. Par exemple, si une bille tourne dans un rail circulaire à vitesse constante, on peut calculer son accélération et en déduire $\vec{F}$.

Enfin la 3ème loi de Newton n'est valable que pour des particules au repos. Pour des particules chargées en mouvement, les forces de Lorentz $\vec{F} = q\, \vec{v} \wedge \vec{B}$ induites par le champ magnétique créé par l'autre particule ne sont pas opposées.

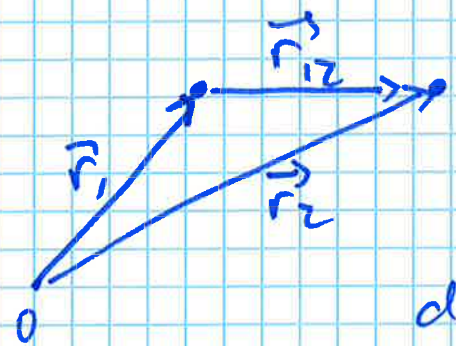
III - La balistique

La balistique est l'étude du mouvement des objets massifs dans le champ de pesanteur terrestre. Le champ de pesanteur est une conséquence de la gravitation universelle : deux objets de masse m_1 et m_2 sont attirés par une force inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare :

$$\|\vec{F}\| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

constante de gravitation universelle.

Si on pose $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, de telle sorte que $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{12}$, on a :

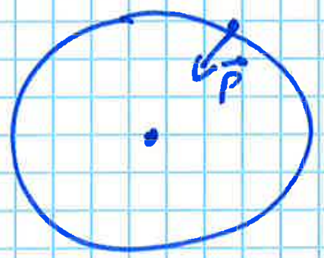


$$\vec{F}_{2\to 1} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \times \frac{\vec{r}_{12}}{\|\vec{r}_{12}\|}$$

et, d'après le principe d'action et réaction,

$$\vec{F}_{1\to 2} = - G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \times \frac{\vec{r}_{12}}{\|\vec{r}_{12}\|}$$

A la surface de la terre, on peut considérer que $r_{12} \simeq R$, le rayon de la terre. Par ailleurs, pour tous les problèmes qui font intervenir de petites distances par rapport au rayon de la terre, on peut se placer dans le plan tangent et remplacer cette force, qui va vers le centre de la terre, par une force verticale.



La force exercée par la terre sur un objet de masse m a l'intensité

$$\|F\| = \frac{GM}{R^2} m$$

On l'écrit en général en introduisant $g = \frac{GM}{R^2}$ sous la forme :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

où $\vec{g}$ est un vecteur vertical de norme g, et où la force, appelée poids, est notée $\vec{P}$.
g a la dimension d'une accélération. Elle vaut $g \simeq 9.8 \text{ m s}^{-2}$.

Si l'on choisit un système de coordonnées où $\vec{k}$ est vertical ascendant, le poids est donc donné par

$$\vec{P} = - mg\,\vec{k}$$

Si un point matériel n'est soumis qu'à l'action du poids, les équations différentielles qui régissent son mouvement sont donc :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

La solution générale de l'équation $\ddot{x} = 0$ est $x(t) = at + b$. (a, b : constantes)

<u>Vérification</u> :

$$x(t) = at + b \Rightarrow \dot{x}(t) = a \Rightarrow \ddot{x}(t) = 0.$$

<u>Preuve</u> :

De façon générale, la solution d'une équation différentielle du type

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t)$$

est donnée par $x(t) = F(t) + a$, où $F(t)$ est une primitive de $f(t)$, c'est-à-dire une fonction qui satisfait $\frac{dF}{dt} = f(t)$.

Appliquons cette règle deux fois de suite.

1) $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0 + a$ car $F(t) = 0$ est une primitive de $f(t) = 0$.

2) $\dot{x} = a \Rightarrow x(t) = at + b$ car $F(t) = at$ est une primitive de $f(t) = a$.

De même, la solution générale de l'équation $\ddot{z} = -g$ est donnée par

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + at + b$$

<u>Vérification:</u>

$$\dot{z}(t) = -gt + a \Rightarrow \ddot{z} = -g.$$

<u>Preuve:</u>

$\ddot{z}(t) = -g \Rightarrow \dot{z}(t) = -gt + a$ car $F(t) = -gt$ est une primitive de $f(t) = -g$.

$\dot{z}(t) = -gt + a \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + at + b$ car $F(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + at$ est une primitive de $f(t) = -gt + a$.

Finalement, la solution générale du problème fait intervenir 6 constantes d'intégration, deux par composantes. On peut les repérer par des indices et écrire :

$$\begin{cases} x(t) = a_x t + b_x \\ y(t) = a_y t + b_y \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + a_z t + b_z \end{cases}$$

Les constantes d'intégration peuvent être fixées par les conditions initiales, c'est-à-dire par la position et la vitesse du point matériel. Dénotons les par $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{v_0} = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$. Par définition,

$$x(t=0) = x_0$$

Mais $x(t=0) = a_x \times 0 + b_x = b_x$

$$\Rightarrow b_x = x_0.$$

De même, $\dot{x}(t=0) = v_{0x}$. Mais $\dot{x}(t=0) = a_x \Rightarrow a_x = v_{0x}$.

Ainsi, $\boxed{x(t) = v_{0x} t + x_0}$.

De même, $\boxed{y(t) = v_{0y} t + y_0}$

Enfin, $z(t=0) = b_z$ et $\dot{z}(t=0) = -g \times 0 + a_z = a_z$, d'où $$\boxed{z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0z} t + z_0}$$

Ces équations sont la solution générale du problème d'un point matériel dans le champ de pesanteur.

Remarque : La solution est indépendante de la masse ! Un objet léger et un objet lourd tombent à la même vitesse. C'est vrai tant qu'on peut négliger les frottements, donc en particulier dans le vide.

Exemples d'utilisation.

① Chute d'un objet : si on lâche un objet sans vitesse initiale d'une hauteur h, son mouvement est donné par

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + h$$

Il touche le sol au bout d'un temps donné par

$$z = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} g t^2 + h = 0$$
$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Réciproquement, si on mesure le

temps t, on en déduit la hauteur

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

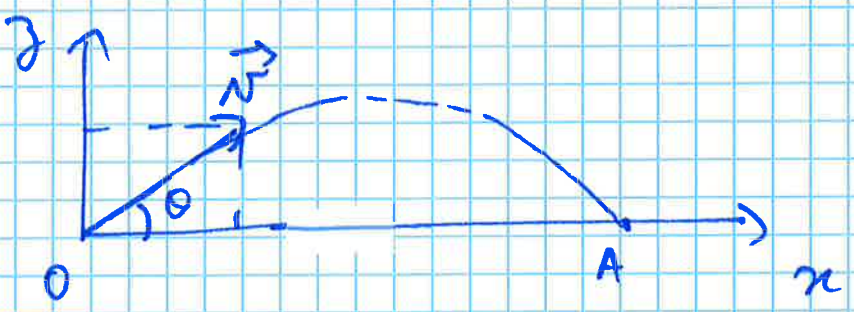
__Application:__ Une falaise surplombe une rivière. On lâche un caillou qui met 2 secondes à toucher l'eau. Quelle est la hauteur de cette falaise ?

__Réponse:__ $h = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} 9{,}8 \times 4 = 19{,}6\,m$.

② Trajectoire d'un projectile.

On lance un projectile depuis l'origine avec une vitesse dans le plan (xz) donnée par :

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta, \quad v_{0z} = v_0 \sin\theta.$$



On se propose de déterminer :

a) La forme de la trajectoire
b) Le point d'impact A.
c) La hauteur maximale
d) Le temps de vol.
e) L'angle θ qui maximise la portée.

<u>Solution :</u>
$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}\, t = v_0 \cos\theta\, t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta\, t \end{cases}$$

a) De la première équation on tire

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

De la troisième, on tire

$$z = -\frac{1}{2} g \frac{1}{v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + \frac{v_0 \sin\theta}{v_0 \cos\theta} x$$

soit $$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + \tan\theta\, x$$

C'est l'équation d'une <u>parabole</u>. Le mouvement a lieu dans le plan (xz) puisque $y(t) = 0$.

b) Le point A est atteint lorsque t satisfait $z(t) = 0$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta\, t = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_0 \sin\theta\, \cancel{t} = \frac{1}{2} g\, t^{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$

x est alors donné par

$$x(t) = v_0 \cos\theta \, t$$

$$= v_0 \cos\theta \, \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_A = v_0^2 \frac{\sin 2\theta}{g}}$$ et bien sûr $z_A = 0$.

c) La hauteur maximale peut être calculée comme le maximum de $z(x)$. Ce maximum satisfait

$$\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} x + \tan\theta = 0$$

$$\Rightarrow x = v_0^2 \cos^2\theta \tan\theta \, \frac{1}{g}$$

$$= v_0^2 \frac{\cos\theta \sin\theta}{g}$$

C'est le milieu de la trajectoire.
z vaut alors:

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} \frac{v_0^4 \cos^2\theta \sin^2\theta}{g^2}$$

$$+ \frac{\sin\theta}{\cos\theta} v_0^2 \frac{\cos\theta \sin\theta}{g}$$

soit $\boxed{z_{max} = \frac{1}{2} v_0^2 \frac{\sin^2\theta}{g}}$

On peut aussi le trouver en écrivant que c'est le temps t où la vitesse verticale s'annule :

$$\dot{z}(t) = 0 \Rightarrow -gt + v_0 \sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

$$\Rightarrow z_{max} = -\frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + v_0 \sin\theta \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

soit $z_{max} = \frac{1}{2} v_0^2 \frac{\sin^2\theta}{g}$

<u>Vérification</u> : $z\,[m]$, $v_0\,[m.s^{-1}]$, $g\,[m.s^{-2}]$

d) Le temps de vol a été calculé comme le temps pour atteindre A, soit

$$t_{vol} = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$$

e) La portée est donnée par

$$x_A = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

$$\frac{dx_A}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{v_0^2}{g} 2 \cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

La portée est maximale pour $\theta = 45°$.

IV - Balistique avec frottement

La trajectoire d'un objet de taille non négligeable peut encore être déterminée en le considérant comme un point matériel, mais à condition de prendre en compte la résistance de l'air. Cette résistance crée une force effective opposée au mouvement, et qui doit augmenter avec la vitesse et s'annuler lorsque la vitesse est nulle. Un modèle simple conduit à inclure dans le problème une force supplémentaire $\vec{F}_r = -b\vec{v}$, proportionnelle à la vitesse.

La deuxième loi de Newton reste valable, mais à condition de prendre pour la force $\vec{F}$ la résultante du poids et de la force de résistance, c'est-à-dire

$$\vec{F} = \vec{P} - b\vec{v}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = -b v_x = -b\dot{x} \\ F_y = -b v_y = -b\dot{y} \\ F_z = -mg \quad -b\dot{z} \end{cases}$$

Les équations du mouvement sont

données par :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -b\dot{x} \\ m\ddot{y} = -b\dot{y} \\ m\ddot{z} = -b\dot{z} - mg \end{cases}$$

Commençons par résoudre la première équation :

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} \Rightarrow \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = -\frac{b}{m}$$

Mais on sait que la dérivée du logarithme d'une fonction est donnée par

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Ainsi, $\dfrac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \dfrac{d}{dt}\left[\ln(\dot{x})\right]$ puisque $\ddot{x}$ est la dérivée de $\dot{x}$.

L'équation différentielle est donc de la forme

$$\frac{d}{dt}\left[\ln(\dot{x})\right] = -\frac{b}{m}$$

$$\Rightarrow \ln(\dot{x}) = -\frac{b}{m}t + a \quad , \quad a : \text{constante},$$

puisque $F(t) = -\dfrac{b}{m}t$ est une primitive de $f(t) = -\dfrac{b}{m}$.

En prenant l'exponentielle des deux membres, il vient :

$$\exp[\ln(\dot{x})] = \exp\left(\frac{-b}{m}t\right)\exp(a)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = e^{a}\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)$$

Si on appelle v_{0x} la vitesse initiale à l'instant $t=0$, on a :

$$e^{a}\exp\left(-\frac{b}{m}\times 0\right) = v_{0x} \Rightarrow e^{a} = v_{0x}$$

Ainsi $\quad \dot{x} = v_{0x}\exp\left(-\frac{b}{m}t\right)$

ou encore, en introduisant la notation

$$\tau = \frac{m}{b},$$

où τ est une constante ayant la dimension d'un temps,

$$\boxed{\dot{x} = v_{0x}\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)}$$

La vitesse dans la direction de x est réduite exponentiellement au cours du temps avec un temps caractéristique $\tau = \frac{m}{b}$.

Pour trouver $x(t)$, il suffit de trouver une primitive du membre de droite. Or, comme $\frac{d}{dt}[\exp(at)] = a\exp(at)$, une primitive de $v_{0x}\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ est donnée par $F(t) = v_{0x}(-\tau)\exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

$$\Rightarrow \quad x(t) = -\tau v_{0x} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right) + c, \quad c \text{ : constante}$$

Si à l'instant $t=0$, le point est en $x=0$, la constante c est donnée par

$$0 = -\tau v_{0x} + c \Rightarrow c = \tau v_{0x}$$

On en déduit que

$$\boxed{x(t) = v_{0x}\tau\left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)}$$

De même, $y(t) = v_{0y}\tau\left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$.

Et si l'objet est lancée avec une vitesse initiale dans le plan (xz), $v_{0y} = 0$ et $y(t) = 0$: le mouvement a lieu dans le plan (xz).

Passons à l'équation différentielle en z. Elle est donnée par :

$$m\ddot{z} = -b\dot{z} - mg$$

ou encore

$$m\ddot{z} + b\dot{z} = -mg.$$

Vous venez en maths que la solution

générale de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

L'équation sans second membre s'écrit

$$m\ddot{z} + b\dot{z} = 0.$$

C'est la même équation que pour x, et la solution générale est donnée par

$$\dot{z} = e^{a} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad a : \text{constante}$$

ou encore

$$\dot{z} = d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad d = \text{constante}$$

Une primitive du membre de droite est donnée par $F(t) = -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, et la solution générale est de la forme

$$z(t) = -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c \quad (c, d : \text{constantes})$$

L'équation avec second membre admet une solution particulière très simple : $\dot{z} = -\frac{m}{b} g \Rightarrow z(t) = -\frac{m}{b} g t$
$= -g\tau t.$

La solution générale est donc de la forme :

$$z(t) = -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c - g\tau t$$

Les constantes d'intégration c et d peuvent être fixées par les conditions initiales :

① $z(t=0) = z_0 \Rightarrow -\tau d + c = z_0$

② $\dot{z}(t=0) = v_{0z} = d - g\tau$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = v_{0z} + g\tau \\ c = z_0 + v_{0z}\tau + g\tau^2 \end{cases}$$

Finalement,

$$z(t) = z_0 - (v_{0z}\tau + g\tau^2)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + v_{0z}\tau + g\tau^2 - g\tau t$$

ou encore

$$\boxed{z(t) = z_0 + (v_{0z}\tau + g\tau^2)\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) - g\tau t}$$

Dans la limite sans frottement, $\tau \to +\infty$ et $\frac{t}{\tau} \to 0$. On peut faire un développement limité de l'exponentielle :

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{\tau^2} + \dots$$

$$\to z(t) \simeq z_0 + (v_{0z}\tau + g\tau^2)\left(\frac{t}{\tau} - \frac{t^2}{\tau^2} + \dots\right) - g\tau t$$

$$= z_0 + v_{0z} t - \cancel{v_{0z}\frac{t^2}{\tau}} + \cancel{gt\tau} - \frac{1}{2} g t^2 - \cancel{g\tau t}$$

0 quand $\tau \to +\infty$

$$= z_0 + v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 .$$

c'est bien la solution du cas sans frottement.

<u>Méthode alternative</u>: pour résoudre directement l'équation différentielle

$$m\ddot{z} + b\dot{z} = -mg$$

on peut aussi faire un changement de fonction inconnue pour faire dispa- raître le second membre. Posons en effet

$$u(t) = z(t) + at$$

$$\dot{u} = \dot{z} + a \quad \text{et} \quad \ddot{u} = \ddot{z}$$

L'équation se récrit :

$$m\ddot{u} + b\dot{u} - ba = -mg$$

Si on choisit $a = \frac{mg}{b} = \tau g$, u satisfait l'équation différentielle :

$$m\ddot{u} + b\dot{u} = 0$$

C'est de nouveau la même équation différentielle que pour x, et la solution générale est

$$u(t) = -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c$$

$$\Rightarrow z(t) = u(t) - a t$$
$$= -\tau d \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + c - g\tau t.$$

<u>Trajectoire</u> : Lorsque $t \to +\infty$,

$$x(t) = v_{0x}\tau\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \longrightarrow v_{0x}\tau$$

et $z(t) \simeq z_0 + v_{0z}\tau + g\tau^2 - g\tau t \to -\infty$.

La trajectoire doit donc avec une asymptote verticale en $x = v_{0x}\tau$.

On peut trouver la forme explicite de la trajectoire. En effet,

$$x(t) = v_{0x}\tau\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

peut s'inverser pour trouver t en fonction de x :

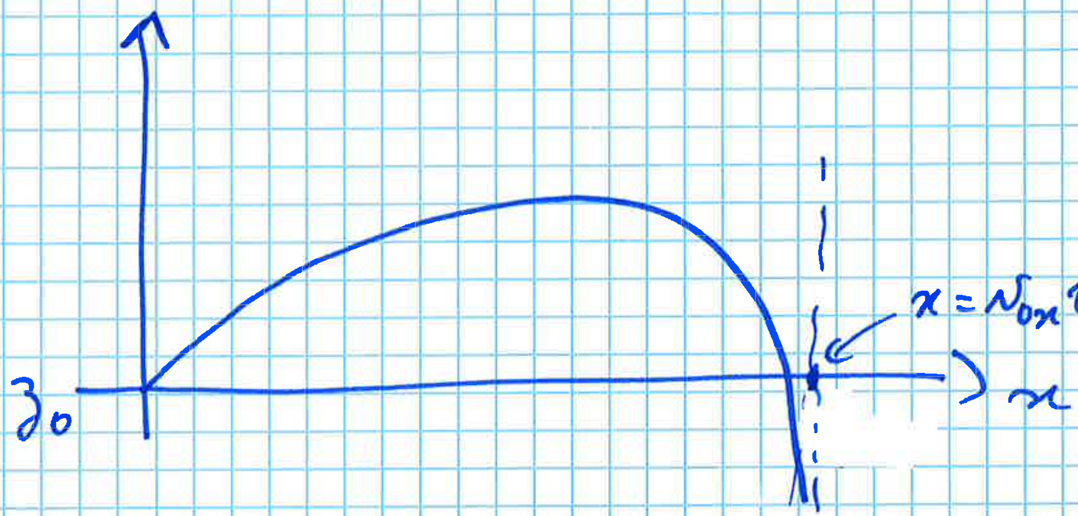
$$x = v_{0x}\tau - v_{0x}\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 1 - \frac{x}{v_{0x}\tau}$$

$$\Rightarrow t = -\tau \ln\left(1 - \frac{x}{v_{0x}\tau}\right)$$

$$\to z(t) = z_0 + (v_{0z}\tau + g\tau^2)\underbrace{\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}_{x(t)/v_{0x}\tau} - g\tau t$$

$$\boxed{z = z_0 + \frac{v_{0z}+g\tau}{v_{0x}}\,x + g\tau^2 \ln\left(1-\frac{x}{v_{0x}\tau}\right)}$$



Remarques : ① Le mouvement dépend de m dans ce cas via $\tau = \frac{m}{b}$.

② La vitesse verticale est donnée par :

$$\dot{z}(t) = (v_{0z} + g\tau)e^{-t/\tau} - g\tau.$$

Lorsque $t \to +\infty$, elle n'augmente pas indéfiniment, mais elle sature à la valeur $-g\tau$.