Corrigé Série 1 : Mathématiques et physique - Analyse dimensionnelle

1 Dérivation des fonctions

1. $\frac{d}{dt}\cos(t) = -\sin(t)$
2. $\frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t)$
3. (*) $\frac{d}{dt}\tan(t) = \left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right)' = \frac{\cos(t)\cos(t)+\sin(t)\sin(t)}{\cos(t)^2} = \frac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$
4. $\frac{d}{dt}\ln(t) = \frac{1}{t}$
5. $\frac{d}{dt}\sqrt{t} = \frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$
6. $\frac{d}{dt}t^{\alpha} = \alpha t^{\alpha-1}$
7. $\frac{d}{dt}\sin(t)\cos(t) = \sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t)\cos(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$
8. $\frac{d}{dt}t\cos(t) = \cos(t) - t\sin(t)$
9. (**) $\frac{d}{dt}t\cos(t)\sin(t) = \cos(t)\sin(t) - t\sin^2(t) + t\cos^2(t) = t\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)$
10. $\frac{d}{dt}\sin(t^2) = 2t\cos(t^2)$

$*(\frac{f}{g})' = (f \cdot \frac{1}{g})' = f \cdot (\frac{1}{g})' + f' \cdot \frac{1}{g} = f(\frac{-g'}{g^2}) + \frac{f'}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

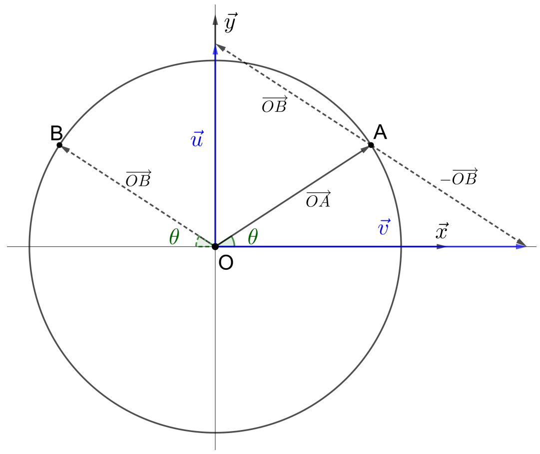
$**(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$

2 Dérivation des fonctions composées

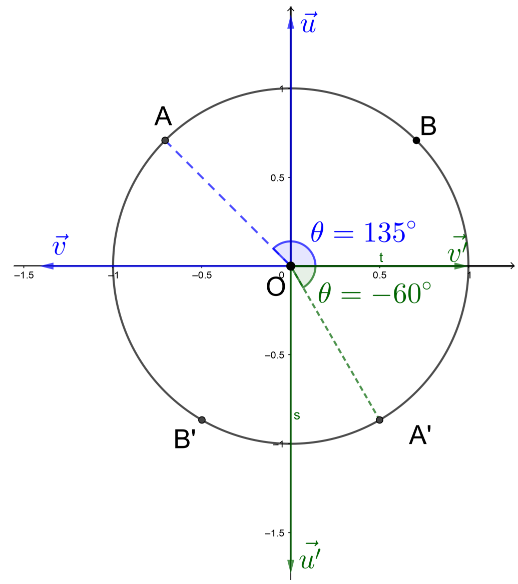
1. $\frac{d}{dt}\cos(\theta) = -\omega\sin\theta$
2. $\frac{d}{dt}\sin(\theta) = \omega\cos\theta$
3. $\frac{d}{dt}\tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{\omega}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\omega}{2}(1 + \tan^2\frac{\theta}{2})$
4. $\frac{d}{dt}\sin(\theta)\cos(\theta) = \omega\cos^2\theta - \omega\sin^2\theta = \omega(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \omega\cos(2\theta)$

3 Vecteurs

1. $\overrightarrow{OA} = R \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} = R \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

2. 

3. $\vec{u} = R \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = R \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

4. 

4 Dérivations (le retour !)

1. $\frac{d}{dt}\cos(\theta) = \frac{d\theta(t)}{dt}(-\sin(\theta(t)) = -\dot{\theta}\sin(\theta)$
2. $\frac{d}{dt}\sin(\theta) = \dot{\theta}\cos(\theta)$
3. $\frac{d}{dt}\tan(\theta) = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2(\theta)} = \dot{\theta}(1+\tan^2(\theta))$
4. $\frac{d}{dt}\ln(\theta) = \frac{\dot{\theta}}{\theta}$
5. $\frac{d}{dt}\sin(\theta)\cos(\theta) = \dot{\theta}\cos^2(\theta) - \dot{\theta}\sin^2(\theta) = \dot{\theta}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = \dot{\theta}\cos(2\theta)$
6. $\frac{d}{dt}\theta^\alpha = \alpha\dot{\theta}\theta^{\alpha-1}$
7. $\frac{d}{dt}\theta\cos(\theta)\sin(\theta) = \dot{\theta}\cos(\theta)\sin(\theta) - \theta\dot{\theta}\sin^2(\theta) + \theta\dot{\theta}\cos^2(\theta) = \frac{\dot{\theta}}{2}\sin(2\theta) + \theta\dot{\theta}\cos(2\theta)$

5 Unités et analyse dimensionnelle

1. La dimension de la constante de la gravitation universelle G et son unité dans le système SI sont respectivement,
$$G = \frac{L^3}{M\,T^2} \qquad \text{ainsi} \qquad G = \left[\frac{m^3}{kg\,s^2}\right] \tag{1}$$
2. Attention ! Il est important que <u>tous</u> les termes de l'expression donnent des mètres.
   (a) $\frac{\mathrm{m \cdot s^{-2}}}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}} \Rightarrow \mathrm{s}^{-1} \neq \mathrm{m}$ non
   (b) $\frac{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{\mathrm{m \cdot s^{-2}}} \Rightarrow \mathrm{s} \neq \mathrm{m}$ non
   (c) $\frac{\mathrm{m^2 \cdot s^{-4}}}{\mathrm{m \cdot s^{-1}}} \Rightarrow \mathrm{m \cdot s^{-3}} \neq \mathrm{m}$ non
   (d) $\frac{\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}}{\mathrm{m \cdot s^{-2}}} \Rightarrow \mathrm{m}$ oui !
   L'expression (d) est donc la seule qui soit compatible avec la contrainte dimensionnelle.