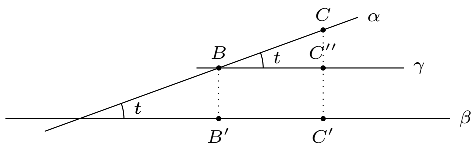
Exercice 1.

a) Calculons la longueur des côtés de la projection du carré. Les côtés parallèles à d sont parallèles au plan β et la longueur de la projection $\overline{A'B'}$ de $\overline{AB}$ vaut donc $\overline{AB}$. Considérons maintenant un plan γ parallèle à β et contenant AB, ainsi que la projection orthogonale $ABC''D''$ de $ABCD$ sur γ ; dans le plan contenant BC et $B'C'$, qui est un plan perpendiculaire à d, on a la situation suivante :

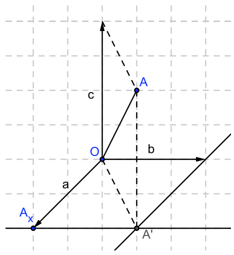


On a donc $\overline{B'C'} = \overline{BC''} = \overline{BC} \cdot \cos(t)$, et conséquemment :

$$\sigma(A'B'C'D') = \overline{A'B'} \cdot \overline{B'C'} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(t) = \sigma(ABCD) \cdot \cos(t).$$

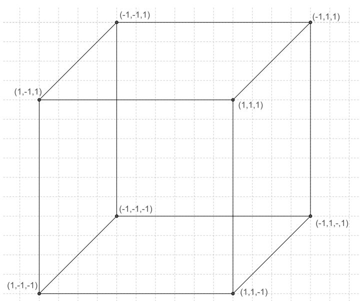
b) Comme au point précédent, nommons d la droite d'intersection des deux plans. Nous savons que l'aire de toute figure peut être approximée par celle d'une union de petits carrés (c'est que nous avons fait pour calculer l'aire d'un disque). Considérons donc un carré dont un côté est parallèle à la droite d et dont la longueur des côtés est $\varepsilon > 0$. Par (a), le carré d'aire ε^2 devient un rectangle d'aire $\varepsilon^2 \cdot \cos(t)$. La réunion de tous les petits carrés formant la figure F est projetée sur une réunion de petits rectangles d'aires $\cos(t)$ fois plus petits formant la figure F', et donc $\sigma(F') = \sigma(F) \cdot \cos(t)$.

Exercice 2. Soit un point de l'espace dont les coordonnées sont (a, b, c). Soit A' la projection du point A sur le plan Oxy (voir figure ci-dessous). Par Pythagore dans le triangle $\triangle OA_xA'$, on a $\overline{OA'} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Par Pythagore dans le triangle $\triangle OAA'$, on a $\overline{OA} = \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Exercice 3.

a) On obtient la représentation suivante :



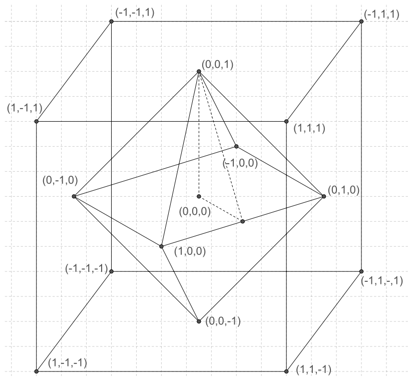
b) Chaque arête mesure 2, donc la surface de chaque face vaut $2 \cdot 2 = 4$ et la surface totale $6 \cdot 4 = 24$.

c) L'angle entre deux plans contenant 2 faces adjacentes vaut $\frac{\pi}{2}$. Deux plans contenant deux faces opposées sont parallèles.

d) Par Pythagore, une diagonale d'une face de ce cube mesure $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Par Pythagore encore une fois, la distance d entre deux sommets n'appartenant pas à une même face est de $d = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

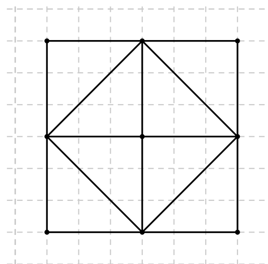
Exercice 4.

a) On obtient la représentation suivante :



b) La longueur d'une arête est égale à la distance entre deux centres de face du cube, cette distance est la même quelque soient les faces considérées et donc les arêtes ont toutes la même longueur. Les faces de l'octaèdre sont sont donc des triangles équilatéraux.

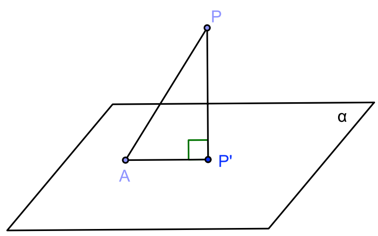
c) En projetant le cube et l'octaèdre sur le plan Oxy, on obtient la figure ci-dessous. Ainsi, par Pythagore, la longueur d'une arête vaut $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. La surface d'une face de l'octaèdre est celle d'un triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$. Cette surface vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi la surface totale de l'octaèdre vaut $8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.



d) Ce triangle est représenté en pointillés dans la figure de la partie **a)**. La longueur de la cathète contenue dans le plan Oxy vaut la moitié d'une arête, $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La longueur de l'hypothénuse vaut par Pythagore (appliqué à une demi-face de l'octaèdre) $\sqrt{\sqrt{2}^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Par construction, la dernière cathète vaut 1. On détermine la valeur de l'angle issu du milieu de l'arête par trigonométrie : $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right) \cong 54.74°$. L'autre angle aigu vaut environ $90° - 54.74° = 35.26°$.

e) Séparons l'octaèdre en deux pyramide à base carré. Par le point précédent, l'angle entre une face adjacente de chaque pyramide vaut $2 \cdot 54.74° = 109.47°$. L'angle entre toutes les autre faces vaut $90°$ (voir par exemple la figure du point **c)**)

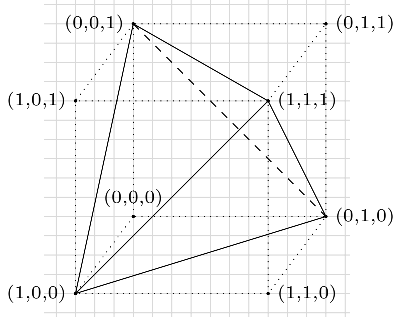
Exercice 5. Nommons P' la projection orthogonale de P sur le plan α (voir figure). Comme le triangle $\triangle AP'P$ est rectangle, la longueur de l'hypothénuse $\overline{PA}$ sera toujours plus longue (ou égale si P' et A sont confondus) à la longueur de la cathète $\overline{PP'}$.



Exercice 6.

a) Par Pythagore, cette distance vaut $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

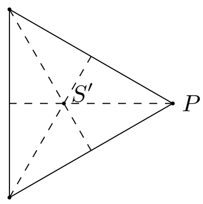
b) La perspective cavalière du solide inscrite dans le cube est :



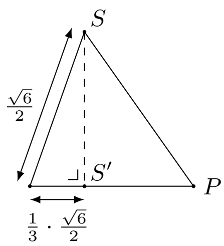
c) Cette figure s'appelle un tétraèdre (tétra signifie 4 en grec), c'est le polyèdre régulier à 4 faces. Toutes ses faces sont des triangles équilatéraux.

d) Par **a)**, chaque face est un triangle équilatéral d'arêtes de longueur $\sqrt{2}$. La mesure d'une hauteur de ce triangle se calcule aussi par Pythagore : $\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

On observe maintenant que la projection orthogonale S' d'un sommet S sur une face opposée est à l'intersection des médianes de la face (ceci est vrai ici parce que le tétraèdre est régulier) :



Comme le point d'intersection des médianes est aux 2/3 d'une médiane depuis son sommet, une vue en coupe contenant la hauteur $[SS']$ du tétraèdre et un sommet P de la face opposée à S (voir ci-dessus) est :



Par Pythagore, la distance cherchée (*i.e.* la hauteur du tétraèdre) est $h=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\sqrt{6}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Exercice 7.

a) Vrai. Soient A et B deux points de l'espace α le plan perpendiculaire au segment $[AB]$ par son milieu. Soit P un point quelconque du plan, alors $\overline{AP}=\overline{BP}$ car les segments $[AP]$ et $[BP]$ sont symétriques par le plan α. Inversément, si P est équidistant de A et B, alors dans le plan contenant A, B, et P, ce dernier point est sur la médiatrice de $[AB]$, et est donc dans le plan α (puisque celui-ci peut être vu comme l'ensemble de toutes les médiatrices de $[AB]$).

b) Faux, il s'agit d'une sphère (analogie avec le cas dans le plan).

c) Vrai. Pour chaque point P de la droite, le lieu géométrique des points à égale distance de P dans le plan perpendiculaire à la droite par P est un cercle. Si on considère ainsi chaque point de la droite on obtient à chaque fois des cercles parallèles, on obtient donc bien un cylindre (de hauteur infinie).

d) Faux. Lorsque deux droites ne sont pas dans le même plan, elles ne se coupent pas, mais elle ne sont pas forcément parallèles comme l'indique l'exemple suivant. Considérer la droite passant par l'origine et le point $(1;0;0)$, ainsi que la droite passant par les points $(0;0;1)$ et $(0;1;1)$.

e) Vrai. Par contraposée, si deux plans ne sont pas parallèles ils ont une droite en commun (proposition du cours) et donc ils se coupent.

Exercice 8.

a) Tétraèdre : 4 Sommets, 6 arêtes et 4 faces, $F + S - A = 4 + 4 - 6 = 2$
Héxaèdre (cube) : 8 Sommets, 12 arêtes et 6 faces, $F + S - A = 6 + 8 - 12 = 2$
Octaèdre : 6 Sommets, 12 arêtes et 8 faces, $F + S - A = 8 + 6 - 12 = 2$
Dodécaèdre : 20 Sommets, 30 arêtes et 12 faces, $F + S - A = 12 + 20 - 30 = 2$
Icosaèdre : 12 Sommets, 30 arêtes et 20 faces, $F + S - A = 20 + 12 - 30 = 2$.

b) On a les développements suivants.

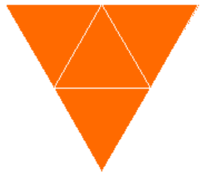


Figure 1 – Tétraèdre

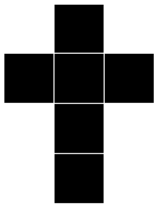


Figure 2 – Hexaèdre

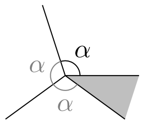
Figure 3 – Octaèdre

Figure 4 – Dodécaèdre

Figure 5 – Icosaèdre

c) En créant une cavité à l'intérieur d'un cube on ajoute 8 Sommets, 12 arêtes et 6 faces, et donc le polyèdre possède 16 Sommets, 24 arêtes et 12 faces et donc $F + S - A = 12 + 16 - 24 = 4$.

Exercice 9. On dessine le développement d'un polyèdre régulier autour de l'un de ses sommets (après avoir coupé le long d'une arête correspondante), et on obtient une figure comme suit :



(comme le polyèdre est convexe, il faut un "reste" comme celui en gris clair pour permettre aux faces de se replier autour du sommet en 3 dimensions). Comme il existe au moins 3 faces attachées à chaque sommet, l'angle α doit être strictement inférieur à $\frac{360}{3} = 120°$. Les seuls polygones réguliers avec de tels angles entre deux de leurs côtés sont :

le triangle équilatéral ($\alpha = 60°$), le carré ($\alpha = 90°$), et le pentagone ($\alpha = 108°$)

(en effet, pour l'hexagone, on a déjà $\alpha = 120°$, un angle qui ne permettrait pas de replier les faces autour du sommet). L'angle α détermine aussi le nombre total de faces qui peuvent se rencontrer en un sommet :

- Si les faces sont triangulaires, on peut placer 3, 4, ou 5 angles de 60° autour d'un sommet de sorte qu'il reste encore de la place pour les replier en 3 dimensions. Chacun de ces cas donne lieu à un polyèdre platonicien : avec 3 triangles équilatéraux, on obtient le tétraèdre (4 faces), avec 4 l'octaèdre (8 faces), et avec 5 l'icosaèdre (20 faces).
- Si les faces sont carrées, on ne peut placer que 3 angles de 90° si l'on veut un solide en 3 dimensions. On obtient ainsi le cube (6 faces).
- Si les faces sont pentagonales, on peut placer 3 angles de 108° autour d'un sommet, ce qui nous donne le dodécaèdre (12 faces).

Exercice 10. On obtient un polyèdre régulier à 12 sommets, il n'en existe qu'un seul, l'icosaèdre. En considérant les 20 faces de l'icosaèdre on obtient un polyèdre régulier à 20 sommets, un dodécaèdre. Avec le tétraèdre régulier, on obtient à nouveau un tétraèdre régulier (car le tétraèdre régulier a 4 faces et 4 sommets.)