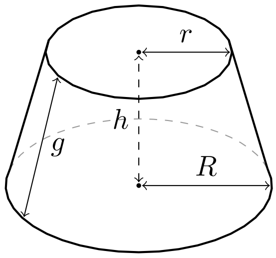


Série 4

Exercice 1. On considère un segment, l'axe, et un autre segment non parallèle qui détermine avec l'axe un trapèze droit. La surface de révolution engendrée par rotation du segment non parallèle autour de l'axe est un cône de révolution tronqué, c'est-à-dire un cône de révolution auquel on a ôté un cône de révolution de hauteur plus petite :



Calcule la surface latérale d'un cône tronqué en fonction de la longueur de la génératrice et des rayons r et R des deux cercles formant les bases. Tu devrais trouver $\pi(r+R)g$.

Exercice 2. On considère un plan α dans l'espace, $[AB]$ un segment dans ce plan, et $[A_1B_1]$ la projection orthogonale de $[AB]$ sur une droite a de α (et non perpendiculaire à AB). Soit M le milieu de $[AB]$ et O le pied sur a de la perpendiculaire à $[AB]$ passant par M. Montre que l'aire de la surface de révolution de $[AB]$ autour de l'axe $[A_1B_1]$ vaut alors $2\pi \cdot \overline{OM} \cdot \overline{A_1B_1}$.

Indication. Il s'agit du même exercice que le précédent, mais on exprime la surface d'une autre façon. Pour comparer les longueurs de cette formule avec la précédente utilise le Théorème de Thalès pour des triangles semblables bien choisis.

Exercice 3. Compare l'aire d'une sphère de rayon r, l'aire d'un cylindre de hauteur $2r$ et de rayon r et l'aire de quatre disques de rayon r.

Cette découverte que tu viens de faire est due à Archimède, qui l'estimait tant qu'il en fit graver une figure sur sa tombe. Celle-ci permit à Cicéron de reconnaître cette tombe alors qu'il était questeur en Sicile.

Exercice 4. Fuseau sphérique. Un fuseau sphérique d'angle α est la surface délimitée sur la sphère par deux méridiens (la pelure d'une tranche de pastèque ou d'orange...). Calcule l'aire d'un fuseau sphérique d'angle α (en radians) sur une sphère de rayon r.

Exercice 5. Compare les volumes de deux polyèdres semblables connaissant leur rapport de similitude λ. Commence par analyser le cas de deux cubes dont les côtés sont de longueur a et λa respectivement.

Exercice 6. On considère un tétraèdre régulier dont les arêtes sont toutes de longueur a. Exprime le volume de ce tétraèdre en fonction de a.

Exercice 7. La pyramide de Khéops. La pyramide de Khéops, dont la construction commença environ en -2650, est une pyramide de base presque parfaitement carrée. Les côtés de la base mesurent en effet 230 mètres (à quelques centimètres près !). De plus les faces latérales sont presque des triangles équilatéraux puisque les côtés issus du sommet mesurent environ 215 mètres.

a) Calcule la hauteur de la pyramide de Khéops.

b) Calcule l'angle que forment les faces latérales avec la base.
c) Calcule l'aire de la surface latérale de la pyramide de Khéops.
d) Calcule le volume de la pyramide de Khéops.

$*$ **Exercice 8.** Sur un rectangle de 5 mètres sur 2, on forme un tas de sable dont les pans font un angle de 60° avec le sol. Dessine ce tas de sable dans les projections de Monge en plaçant un sommet du rectangle de base en $A = (2; 1; 0)$ avec le plus long des côtés AB parallèle à Ox (avec toutes les coordonnées des sommets positives). Donne le volume du tas de sable, ainsi que l'angle que forme une *arête* du tas de sable avec le sol.

Exercice 9. Des indiens Sioux construisent un tipi à l'aide de 6 perches de 6 mètres de long. Ils les attachent ensemble de sorte à laisser dépasser 1 mètre en dehors de la tente et placent les extrêmités à intervalles réguliers sur un cercle de 3 mètres de rayon. De quelle surface au sol disposent ces Sioux dans leur tipi ? Quelle est la hauteur de leur tipi et quel est son volume ?

Remarque. En fait les indiens construisent des tipis asymétriques (à cause du vent) et utilisent plus de six perches en général.

Exercice 10. Volume d'une pyramide tronquée. On considère une pyramide de base triangulaire ΔABC situé dans le plan horizontal Oxy. On considère encore un plan $\mathcal{A}$ parallèle à Oxy coupant la pyramide en un triangle $\Delta A'B'C'$. Notre sujet d'étude est la pyramide tronquée formée des points de la pyramide situé entre les triangles ΔABC et $\Delta A'B'C'$. Soit H la hauteur de la pyramide de base ΔABC et h la hauteur de la pyramide tronquée ; en d'autres termes h est la distance entre le plan Oxy et le plan parallèle $\mathcal{A}$.

a) Explique pourquoi la pyramide de base $\Delta A'B'C'$ est semblable à la pyramide de base ΔABC. La hauteur de cette pyramide plus petite vaut $H - h$.
b) Considérons une homothétie de centre S qui transforme la grande pyramide en la petite. Appelons λ son rapport. Explique pourquoi λ est un nombre réel compris entre 0 et 1. Exprime la hauteur de la petite pyramide en fonction de λ et de H. Exprime aussi l'aire de la base de la petite pyramide $\sigma' = \sigma(\Delta A'B'C')$ en fonction de λ et de l'aire $\sigma = \sigma(\Delta ABC)$.
c) Montre que le volume de la pyramide tronquée vaut
$$\frac{1}{3} \cdot (1 + \lambda + \lambda^2) \cdot \sigma \cdot h.$$
d) En utilisant l'expression trouvée pour $\sigma(\Delta A'B'C')$ en (2), montre que
$$\lambda \cdot \sigma = \sqrt{\sigma \cdot \sigma'}.$$
e) Montre que le volume de la pyramide tronquée vaut
$$\frac{1}{3} \cdot (\sigma + \sqrt{\sigma \cdot \sigma'} + \sigma') \cdot h.$$
f) Par passage à la limite, montre que le volume d'un cône tronqué de hauteur h dont les bases sont des cercles de rayon r et R vaut
$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (r^2 + rR + R^2) \cdot h.$$
g) Calcule les volumes d'une pyramide P de base carrée de côté 2 et de hauteur 1, d'une pyramide P' de base carrée de côté 1 et de hauteur 1, et d'une d'une pyramide tronquée T de bases carrées de côté 2 et 1 respectivement et de hauteur 1. Compare la somme des volumes des pyramides
$$\mathrm{vol}(P) + \mathrm{vol}(P')$$
avec le volume $\mathrm{vol}(T)$ de la pyramide tronquée. Dans le plan, l'aire du "triangle tronqué", c'est-à-dire du trapèze, est égal à la somme des aires des triangles de mêmes bases et de même hauteur ; obtient-on une expression similaire avec les pyramides ?