

Cours Euler: objectifs du test 5

5 mars 2025

Pour aider à la comparaison avec les objectifs du PER, nous avons indiqué en début de section et en italique quels buts sont atteints et quelles "attentes fondamentales" correspondent à chaque partie. Il y a bien sûr d'autres compétences que celles du PER qui sont atteintes. En particulier l'importance de la théorie, l'apprentissage du vocabulaire mathématique avec ses définitions, de la rédaction de démonstrations et de justifications vont en général bien au-delà de ce qu'on demande habituellement aux élèves dans un cours de mathématiques. La note obtenue par l'élève, indiquée en pour-cents est calculée sur 100 points pour ce test (la moyenne étant à 60% et indiquant si l'élève est en principe capable de suivre le rythme du cours Euler). Pour le canton de Vaud, cette note ne doit donc pas être utilisée telle quelle dans l'agenda.

1 Test 5 : Les nombres réels, les polynômes et généralités sur les fonctions

Remarque : Ce module correspond principalement à une partie de MSN 32 et 33. La première partie de ce module est idéale pour l'apprentissage de la calculatrice : opérations de base, parenthèses, mise en mémoire et récupération, puissances et racines.

1.1 Nécessité des nombres réels

Découverte de quelques nombres irrationnels.

1. Preuve de l'irrationalité de \sqrt{p} pour p un nombre premier (à comprendre et à connaître, voir cours et série 16).
2. Les lacunes de \mathbb{Q} , majorant, borne d'un ensemble de nombres (ne sera pas demandé dans le test)
3. Mention de la transcendance de π

1.2 Le corps des réels

Comparaison, approximation, encadrement de nombres réels.

1. Définition heuristique (écriture décimale).
2. \mathbb{R} est un corps. Connaître les axiomes.

3. Notation de quotients de nombres réels en fractions (la notation de fraction indique un quotient).
Preuve de l'existence et unicité du quotient par un nombre non nul.
4. Propriétés des fractions, simplification, amplification, somme, etc. (connaître les preuves, voir aussi série 16).
5. Ordre des réels ($<$ et \leq , $>$ et \geq), approximations de nombres réels, encadrement des racines.

1.3 Puissances entières

Connaissance et utilisation de puissances (multiplication, division, etc.), des carrés parfaits pour extraire une racine, de la notation scientifique.

1. Définition (à connaître) et propriétés (avec démonstration, voir aussi série 17).
2. Simplification d'expressions
3. Identités remarquables (à connaître et à savoir démontrer)
4. Puissances de 10 et notation scientifique : connaître la définition et savoir utiliser.

1.4 Racines n -ièmes

Utilisation et connaissance des racines carrées et cubiques de nombres réels, calculs de produits et de quotients de racines. La calculatrice permet de vérifier le résultat obtenu par des manipulations algébriques, de confronter sa démarche au réel.

1. Définition et existence des racines n -ièmes pour n pair ou impair (conditions d'existence à savoir)
2. Propriétés des racines n -èmes (avec démonstration, voir aussi série 18)

1.5 Puissances fractionnaires

1. Définition comme puissance d'une racine et racine d'une puissance, avec condition d'existence.
2. Existence de $x^{\frac{a}{n}}$ (connaître conditions), indépendance par rapport au choix de la fraction (prop. 3.1, connaître la démonstration).
3. Propriétés des puissances fractionnaires (avec démonstration, voir aussi série 18).

1.6 Définition heuristique de l'anneau des polynômes à coefficients dans K et r indéterminées

1. Définition heuristique de $K[x_1, \dots, x_n]$ comme un anneau commutatif contenant les coefficients (nombres de K) et les indéterminées x_1, \dots, x_n , en ne supposant aucune autre relation algébrique entre les indéterminées et les coefficients. Autrement dit, tout polynôme peut s'écrire comme une somme de monômes non semblables et cette écriture est unique à l'ordre des termes près.
2. Différence entre indéterminée et paramètre (coefficient représenté par une lettre).

1.7 Monômes

Connaissance de la terminologie, écriture ordonnée et réduite de monômes, de degré ≤ 6 .

1. Définition, coefficient, partie littérale et degré
2. Convention de notation pour x^0 et x^1
3. Monômes semblables.
4. Réduction de monômes

1.8 Polynômes

Connaissance de la terminologie, écriture ordonnée et réduite de polynômes, à coefficients entiers et rationnels. Connaît et utilise les règles et convention d'écriture algébrique. Interprète des expressions littérales et identifie celles qui sont équivalentes.

1. Forme réduite, termes, terme constant et terme dominant. Le fait que les monômes non semblables n'ont pas de relation entre eux implique que la forme réduite est unique (à l'ordre des termes près).
2. Égalité de polynômes : si et seulement si leur forme réduite ont les mêmes coefficients (vu l'unicité de la forme réduite).
3. Degré, ordonner. Savoir utiliser et expliquer les règles de commutativité, d'associativité et de distributivité au moment de réduire un polynôme.

1.9 Opérations sur les polynômes

Opérations : addition, soustraction, multiplication de monômes et de polynômes. Connaissance et utilisation des identités remarquables de degré 2. Utilisation du calcul littéral comme outil de preuve.

1. Produit, somme, différence et opposé. Utilisation des propriétés des anneaux pour calculer. K est un sous-anneau de $K[x_1, \dots, x_n]$. Identités remarquables pour les polynômes.
2. Formule du degré d'un produit de polynômes, avec démonstration dans le cas à une indéterminée. L'anneau des polynômes est intègre.
3. Preuve du fait que seuls les polynômes constants non nuls sont inversibles, et preuves similaires utilisant le degré.

1.10 Les fonctions : introduction

Réalise une représentation graphique à partir d'un tableau de valeurs, d'une expression fonctionnelle. Détermine une expression fonctionnelle à partir d'un tableau de valeurs dans certains cas. Utilise le langage algébrique pour établir des preuves.

1. Terminologie (ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image d'un élément).

2. Exemples (y compris non numériques).
3. Représentation schématique d'une fonction.
4. Fonction injective, surjective, bijective (connaître les définitions, savoir démontrer qu'une fonction donnée est injective, surjective, bijective).

1.11 Le graphe d'une fonction

1. Couples et produit cartésien
2. Système d'axes (abscisse, ordonnée)
3. Représentation graphique d'une fonction, définition du graphe (à connaître). Savoir reconnaître graphiquement si une correspondance est une fonction.
4. Ordonnée à l'origine d'une fonction réelle
5. Critère d'injectivité et de surjectivité utilisant le graphe d'une fonction (démonstration).
6. Composition de fonctions : définition. Savoir obtenir la formule de la composée de fonctions, sa forme schématique et sa forme graphique.
7. Restriction et ensemble de définition

Remarque. En plus des compétences mentionnées, le cours Euler attend des élèves qu'ils connaissent leurs définitions et la caractérisation des objets mathématiques étudiés, qu'ils sachent démontrer certaines propositions du cours (elles sont indiquées dans la liste ci-dessus), qu'ils sachent présenter une preuve simple sur la base des définitions et des propriétés vues en cours.