Corrigé 2 : Volumes de révolution

Exercice 1

Cône de révolution.

(1) Le développement du cône est un secteur de rayon $g = \sqrt{r^2+h^2}$ et d'angle au centre $\alpha = \dfrac{2\pi r}{g}$. Ainsi, $S = \cancel{\pi} g^2 \dfrac{\alpha}{2\cancel{\pi}} = g^{\cancel{2}} \dfrac{2\pi r}{2\cancel{g}} = \pi r g = \pi r \sqrt{r^2+h^2}$.

(2) La hauteur des triangles vaut $g = \sqrt{r^2+h^2}$ et leur aire $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\pi r}{n} g = \dfrac{\pi r g}{n}$.
Ainsi, $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\pi r g}{n} = \pi r g \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} = \pi r g \lim\limits_{n\to\infty} \cancel{n} \cdot \dfrac{1}{\cancel{n}} = \pi r g = \pi r \sqrt{r^2+h^2}$.

(3) Avec le calcul intégral et la formule vue au cours,

$$S \;=\; 2\pi \int_0^h \frac{rx}{h} \sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\,dx \;=\; \pi r \sqrt{r^2+h^2}$$

Exercice 2

Cône de révolution tronqué.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^h \left(r + \frac{R-r}{h} x\right) \sqrt{1+\frac{(R-r)^2}{h^2}}\,dx \\ &= 2\pi \sqrt{1+\frac{(R-r)^2}{h^2}} \int_0^h \left(rx + \frac{R-r}{h}\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^h = \pi(R+r)\sqrt{(R-r)^2+h^2} \end{aligned}$$

En particulier, lorsque $r = 0$, on retrouve la résultat de l'exercice précédent.

Exercice 3

Tonneau. Calcule l'aire du tonneau obtenu en faisant tourner autour de l'axe horizontal Ox le graphe de la fonction $f(x) = \sin x$ définie sur $[\pi/6, 5\pi/6]$.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\,dx = 4\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\,dx \\ &= -4\pi \int_{\sqrt{3}/2}^{0} \sqrt{1+u^2}\,du = 4\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1+\tan^2(s)}\frac{1}{\cos^2(s)}\,ds = 4\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\cos^3(s)}\,ds \end{aligned}$$

Or, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^3(s)} ds &= \frac{1}{\cos(s)}\tan(s) - \int \frac{\sin(s)}{\cos^2(s)}\tan(s) ds = \frac{1}{\cos(s)}\tan(s) - \int \frac{1}{\cos(s)}\tan^2(s) ds \\ &= \frac{1}{\cos(s)}\tan(s) - \int \frac{1}{\cos(s)}(\tan^2(s)+1) ds + \int \frac{1}{\cos(s)} ds \\ &= \frac{1}{\cos(s)}\tan(s) - \int \frac{1}{\cos^3(s)} ds + \int \frac{1}{\cos(s)} ds\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos^3(s)} ds &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos(s)}\tan(s) + \int \frac{1}{\cos(s)} ds\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos(s)}\tan(s) + \ln\left(\frac{1}{\cos(s)} + \tan(s)\right) + C\right)\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}S &= 4\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\cos^3(s)} ds \\ &= 4\pi \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos(s)}\tan(s) + \ln\left(\frac{1}{\cos(s)} + \tan(s)\right)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}/2} \simeq 12.40385\end{aligned}$$

Calcule ensuite son volume.

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^2(x) dx = \pi \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\, dx \\ &= 2\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\, dx \\ &= \pi\left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} \\ &= \pi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin(\pi)\right) - \pi\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin(2\pi/6)\right) \\ &= \pi\frac{\pi}{2} - \pi\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \pi\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \simeq 1.805176\end{aligned}$$

Exercice 4

Vrai ou faux ? Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

(1) L'aire totale du domaine délimité par le graphe d'une fonction est toujours positive. VRAI, mais l'intégrale ne l'est pas forcément.

(2) L'aire du cylindre de rayon r et de hauteur $2r$ est plus grande que celle de la sphère de rayon r qu'il contient. FAUX. L'aire du cylindre est $2r2\pi r = 4\pi r^2$, tandis que l'aire de la sphère est aussi $4\pi r^2$.

(3) Soient D et D' deux domaines de même aire se trouvant dans le plan Oxz. Alors les deux volumes de révolution obtenus en faisant tourner D et D' autour de Ox ont même volume. FAUX. Contre-exemple : $f(x) = x^2$ et $g(x) = 1/3$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Les deux aires sont égales à $1/3$, mais

$$\pi \int_0^1 f(x)^2 dx = \frac{\pi}{5} \neq \pi \int_0^1 g(x)^2 dx = \frac{\pi}{9}$$

(4) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$ est toujours positive (ou nulle) puisqu'elle calcule une aire. FAUX. Contre-exemple $f(x) = -1$ sur $[0, 1]$.

Exercice 5

Volume du cône de révolution de hauteur h et dont la base est un disque de rayon r.

$$V = \pi \int_0^h f(x)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}dx = \frac{r^2\pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{r^2\pi}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Exercice 6

Calcule le volume de l'hyperboloïde de révolution d'équation $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$ pour $1 \geq z \geq -1$.

$$V = \pi \int_{-1}^1 f(x)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1 + z^2)dz = \pi \left[z + \frac{z^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{8\pi}{3}$$

Exercice 7

Différence de volumes. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues et supposons que $g(x) \geq f(x) \geq 0$ pour tout x. On suppose encore que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. On considère le corps de révolution K obtenu en faisant tourner autour de l'axe Ox les graphes de f et de g.

(1) Montre que le volume de ce corps de révolution est égal à la différence des volumes des corps de révolution K_g obtenu en faisant tourner le graphe de g autour de Ox et K_f obtenu en faisant tourner le graphe de f autour de Ox.

Comme dans le cours, nous saucissonnons l'intervalle $[a, b]$ par une subdivision régulière. On approche ensuite le volume de chaque tranche (de saucisson avec un trou au milieu) par le volume d'un cylindre troué de hauteur $\frac{b-a}{n}$. Pour les sommes de Darboux supérieures, le rayon extérieur est $M_i = \max_{[x_{i-1}, x_i]} |g(x)|$ et le rayon intérieur est $m_i = \min_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)|$. Le volume est donc

$$V_i = \pi M_i^2 \frac{b-a}{n} - \pi m_i^2 \frac{b-a}{n}$$

Pour les sommes de Darboux inférieures, le rayon extérieur est $n_i = \min_{[x_{i-1}, x_i]} |g(x)|$ et le rayon intérieur est $N_i = \max_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)|$. Le volume est donc

$$v_i = \pi n_i^2 \frac{b-a}{n} - \pi N_i^2 \frac{b-a}{n}$$

Comme f est g sont intégrables, f^2 et g^2 sont aussi intégrables. Les volumes v_i et V_i sont donc les sommes de Darboux supérieures et inférieures qui convergent vers l'inégrale du volume qui est donc

$$V = \int_a^b (\pi g(x)^2 - \pi f(x)^2) dx$$

La différence des volumes de révolution est

$$\int_a^b \pi g(x)^2 dx - \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

Par linéarité de l'intégrale, ces deux quantités sont bien égales.

(2) Calcule le volume du tore de révolution obtenu en faisant tourner autour de Ox le disque de rayon 1 centré en $(0;2)$.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 \left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(4+4\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right) - \left(4-4\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right) dx \\ &= 2\pi \int_0^1 8\sqrt{1-x^2}dx \\ &= 16\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \end{aligned}$$

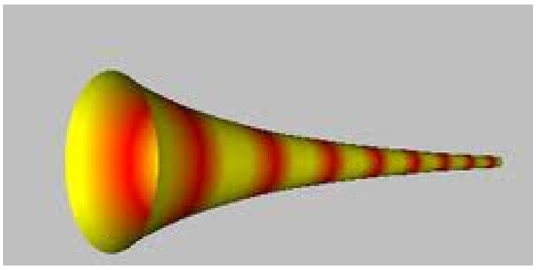
Cette dernière intégrale étant la surface d'un quart de cercle de rayon 1 (voir cours), $V = 16\pi\frac{\pi}{4} = 4\pi^2$

(3) Calcule le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de Ox la surface comprise entre les graphes de $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^{2/3} - x^4\right) dx = \pi \left(\frac{3}{5}x^{5/3} - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{5}$$

Exercice 8

Le paradoxe de la trompette de Gabriel. On considère la surface de révolution obtenue en faisant tourner la fonction $\dfrac{1}{x+1}$ autour de l'axe Ox pour $0 \leq x < \infty$:



(1) On calcule le volume à l'aide de la formule (pour une intégrale généralisée) :

$$V = \pi \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}dx = -\frac{\pi}{1+x}\Big|_0^\infty = \pi$$

Par contre le calcul de la surface fait intervenir la dérivée $\left(\dfrac{1}{x+1}\right)' = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ et

$$S = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{x+1}\sqrt{1+\left(\frac{1}{(1+x)^2}\right)^2}dx = 2\pi \int_0^\infty \frac{\sqrt{1+(1+x)^4}}{(x+1)^3}dx$$

Or la fonction $1 + (1+x)^4$ est plus grande que $(1+x)^4$ si bien que

$$S \geq 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{(1+x)^4}}{(x+1)^3} dx = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)} dx = 2\pi \log(1+x) \Big|_0^{\infty} = \infty$$

Le volume est fini, mais la surface est infinie !

(2) Le paradoxe de la peinture de cet instrument est qu'on peut remplir la trompette de peinture, mais il en faudrait apparemment une quantité infinie pour en peindre sa surface ! Le paradoxe vient de notre interprétation de la façon de peindre une surface infinie. On imagine a priori que la couche de peinture est uniforme (disons $0,1$ mm d'épaisseure). Dans ce cas il faudrait effectivement un *volume* de peinture infini pour peindre cette surface, mais elle ne pourrait servir à peindre l'intérieur de la trompette qui se resserre indéfiniment. Lorsqu'on verse πm^3 de peinture dans la trompette, elle en couvre toute la surface, mais l'épaisseur de la couche tend vers zéro !

Exercice 9

Calculer l'aire du tonneau obtenu en faisant tourner autour de l'axe horizontal Ox le graphe de la fonction $f(x) = 2 - x^2$ définie sur $[-1, 1]$. Calculer ensuite son volume.

Avec le changement de variables $u = -2x$:

$$\begin{aligned}
A &= 2\pi \int_{-1}^{1} (2 - x^2)\sqrt{1 + (-2x)^2} dx \\
&= 2\pi \int_{2}^{-2} \left(2 - \frac{u^2}{4}\right) \sqrt{1+u^2} \frac{1}{-2} du \\
&= \pi \int_{-2}^{2} \left(2 - \frac{u^2}{4}\right) \sqrt{1+u^2} du \\
&= 2\pi \int_{-2}^{2} \sqrt{1+u^2} du - \frac{\pi}{4} \int_{-2}^{2} u^2 \sqrt{1+u^2} du
\end{aligned}$$

On donne les formules suivantes sans démonstration :

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+u^2} du &= \frac{u}{2}\sqrt{u^2+1} + \frac{1}{2} \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) + C. \\
\int u^2\sqrt{1+u^2} du &= \frac{u}{4}\sqrt{(u^2+1)^3} - \frac{u}{8}\sqrt{u^2+1} - \frac{1}{8} \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right) + C
\end{aligned}$$

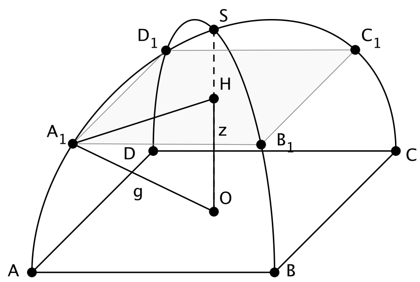
Par conséquent $A = 29.55$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{1} (2-x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} 4 - 4x^2 + x^4 dx = \pi \left(4x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \pi 2 \left(4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5}\right) \simeq 18.0188 \end{aligned}$$

Exercice 10

On considère une tente igloo de base carrée, soutenue par deux arceaux reliant les sommets opposés de la base. La diagonale de la base carrée $ABCD$ vaut $2r$. Chacun des arceaux forme un arc de cercle centré en O, le milieu de la base de la tente. On considère que les arceaux se coupent au point S situé à l'aplomb de O et que la toile de la tente est parfaitement tendue.

$OD = OS = r$.
L'intersection de la tente avec un plan parallèles au sol, forme un carré.
Si le plan se situe à une hauteur $z \in [0, r]$ mètres du sol, la demi diagonale du carré vaut $HA_1 = \sqrt{(OA_1)^2 - (OH)^2} = \sqrt{r^2 - z^2}$.
Ainsi, l'aire du carré vaut
$2(HA_1)^2 = 2 \cdot (r^2 - z^2)$



(1) On approche le volume de la tente en la découpant en n tranches parallèles au sol et d'épaisseur r/n.

$$V_t \simeq \sum_{i=1}^{n} 2\left(r^2 - z_i^2\right) \frac{r}{n}$$

où $z_i = \dfrac{r}{n}\, i$ est la hauteur de la i^e tranche. Ceci n'est rien d'autre qu'une somme de Riemann de la fonction $f(z) = 2 \cdot (r^2 - z^2)$ et en faisant tendre n vers l'infini il vient

$$V_t = \lim_{n\to\infty} = 2 \int_0^r r^2 - z^2\, dz = 2 \left[zr^2 - \frac{z^3}{3}\right]_0^r = \frac{4}{3}\, r^3.$$

(2) La pyramide de base $ABCD$ et de sommet S a pour volume $V_p = \dfrac{2}{3}\, r^3$.

Le volume de la demi sphère de rayon OS vaut $V_s = \dfrac{2}{3}\, \pi\, r^3$.

Ainsi, $\quad V_t = 2V_p \quad$ et $\quad V_s = \dfrac{\pi}{2}\, V_t = \pi\, V_p$.