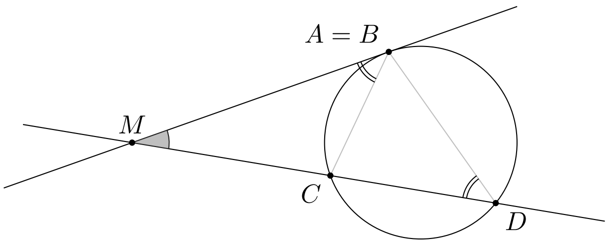
Exercice 1. Calculons l'aire de chacune des pizzas entières. L'aire de la grande vaut $\pi 33^2 \cong 3421.2$ cm^2. L'aire de la petite vaut $\pi 23^2 = 1662.0$ cm^2. Ainsi l'aire de la grande tranche vaut $\dfrac{1}{8} \cdot 3421.2 \cong 427.6$ cm^2 et celui de la petite tranche vaut $\dfrac{1}{6} \cdot 1662.0 \cong 277.0$. Ainsi la grande pizza a un coût de $\dfrac{4.50}{427.7} \cong 0.0105$ CHF/cm^2, tandis que la petite a un coût de $\dfrac{3}{277.0} \cong 0.0108$ CHF/cm^2. Donc la grande tranche de pizza est plus avantageuse !

Exercice 2. Soit un triangle $\triangle ABC$ rectangle en A avec H le pied de la hauteur issue de A. Par le théorème d'Euclide, $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$ et $\overline{AC}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{BC}$. Ainsi $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC} + \overline{CH} \cdot \overline{BC} = \overline{BC}(\overline{BH} + \overline{CH}) = \overline{BC}^2$.

Exercice 3. La démonstration vue au cours reste valide, mais on doit utiliser un des cas “limites” du théorème de l'angle inscrit, celui où le sommet où est mesuré l'angle est confondu avec une extrémité de l'arc de cercle intercepté :



Ici, les triangles $\triangle MAC$ et $\triangle MDA$ sont semblables car :

- les deux triangles ont le même angle en M,
- la mesure de l'angle $\widehat{MAC}$ est égale à celle de $\widehat{MDA}$ car les deux angles interceptent le même arc $\widehat{AC}$ (cas limite du théorème de l'angle inscrit au point A).

Donc

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MC}} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD} \quad (\text{car } A = B).$$

Exercice 4. Les angles $\widehat{AMC}$ et $\widehat{DMB}$ sont égaux car opposés par le sommet. Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux car ils interceptent le même arc de cercle. Ainsi, par le premier cas de similitude des triangles, les triangles $\triangle AMC$ et $\triangle DMB$ sont semblables. Alors $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \dfrac{\overline{MC}}{\overline{MB}}$ ce qui implique $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$.

Exercice 5. Tracer un segment $[AB]$ de longueur $2y$ puis une parallèle à une distance x. Tracer le cercle de diamètre $[AB]$. Il coupe la parallèle en deux points, choisissons l'un de ces points C et abaissons la perpendiculaire au segment initial. Elle coupe le segment en un point M et le cercle en un autre point D. Le point M du segment servira de référence pour le Théorème du produit constant :

$$\overline{AM} \cdot \overline{MB} = \overline{CM} \cdot \overline{MD} = x^2.$$

Comme $\overline{AM} + \overline{MB} = 2y$, les longueurs des côtés du rectangle seront $\overline{AM}$ et $\overline{MB}$.

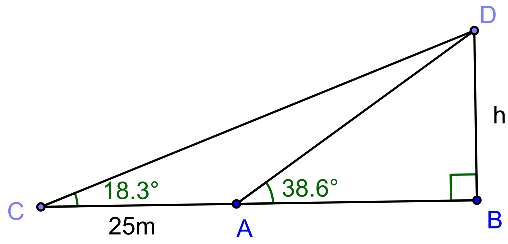
Exercice 6. On trouve la longueur du troisième côté en utilisant le théorème de Pythagore : $\sqrt{9^2 - 5^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$. L'angle opposé à l'hypothénuse mesure 90°. L'angle opposé à la cathète de 5 mètre vaut $\sin^{-1}\left(\frac{5}{9}\right) \cong 33.75°$, le dernier angle mesure $\cos^{-1}\left(\frac{5}{9}\right) \cong 56.25°$. L'aire vaut $5\sqrt{14}$.

Exercice 7. Notons O le centre du cercle et c la longueur cherchée du côté du pentagone étoilé. Traçons la droite DO, elle coupe le segment $[EC]$ en R. Alors l'angle $\widehat{ORE}$ est droit, le triangle $\triangle ORE$ est donc rectangle en R. Comme l'angle $\widehat{ROE}$ est l'angle au centre d'un pentagone inscrit, il vaut $\frac{2\pi}{5}$. Ainsi on peut calculer la longueur $\overline{RE}$ par trigonométrie : $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\overline{RE}}{r}$ et donc $\overline{RE} = r \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Comme $\overline{RE} = \frac{c}{2}$, on en conclut que

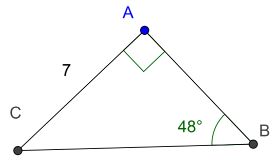
$$c = 2r \sin\left(\tfrac{2\pi}{5}\right) \cong 47.55.$$

Exercice 8. Notons d la distance horizontale et h la hauteur dont on s'est élevé. Alors $h = 6400\sin(4.5°) \cong 502.14$ km et $d = 6400\cos(4.5°) \cong 6380.27$ km.

Exercice 9. La situation est représentée dans la figure ci-dessous, où h est la hauteur de l'arbre et $\overline{AB}$ est la distance à laquelle l'observateur se trouvait au début. Par trigonométrie dans les triangles rectangles $\triangle CBD$ et $\triangle ABD$, on a $\tan(38.6°) = \dfrac{h}{\overline{AB}}$ et $\tan(18.3°) = \dfrac{h}{25+\overline{AB}}$. Ainsi d'une part $h = \overline{AB}\tan(38.6°)$ et d'autre part $h = (25+\overline{AB})\tan(18.3°)$. Alors $\overline{AB}\tan(38.6°) = (25+\overline{AB})\tan(18.3°)$ et donc $\overline{AB} = \dfrac{25\tan(18.3°)}{\tan(38.6°)-\tan(18.3°)} \cong$ 17.6 m. Finalement, par la relation trouvée plus haut $h = \overline{AB}\tan(38.6°) \cong 14.1$.



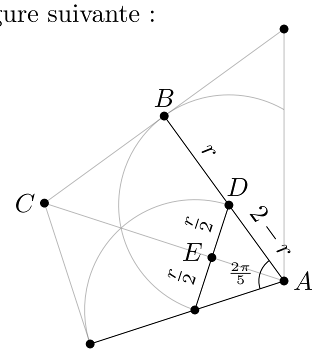
Exercice 10. Représentons le triangle :



Ainsi, $\sin(48°) = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{7}{\overline{BC}}$ et donc $\overline{BC} = \dfrac{7}{\sin(48°)} \cong 9.42$cm. En utilisant le cosinus, on a $\cos(48°) = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ et donc $\overline{AB} = \cos(48°)\cdot\overline{BC} \cong 6,30$. La mesure de l'angle γ vaut $\cos^{-1}\left(\dfrac{7}{\overline{BC}}\right) = 42°(= 90° - 48°)$. L'aire du triangle vaut $\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{2} \cong 22.06$ cm^2.

Exercice 11. Comme l'aire du triangle vaut $\sigma = \dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{2}$, on en conclut que $\overline{AC} = \dfrac{2\sigma}{\overline{AB}} \cong 48.61$ m. Par Pythagore, $\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2} \cong 64.77$ m. L'angle β vaut $\tan^{-1}\left(\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right) \cong 48.64°$, l'angle γ vaut $90° - \beta = 41.36°$.

Bonus Les segments reliant le centre du pentagone à ses sommets le partagent en 5 parties ayant même angle au centre ; cet angle vaut donc $\frac{2\pi}{5}$. L'angle entre deux segments du centre à deux milieux de côtés consécutifs sera aussi de $\frac{2\pi}{5}$, et on obtient la figure suivante :



Les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle AED$ sont semblables (car ils ont même angle au sommet $\frac{2\pi}{5}/2 = \frac{\pi}{5}$ en A, et sont rectangles en B et E respectivement). Dans le triangle rectangle ABC, on a $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ et $\tan(\frac{\pi}{5}) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{2}$, donc

$$\overline{AC} = \frac{2}{\cos(\frac{\pi}{5})} \qquad \text{et} \qquad \overline{BC} = 2\tan\left(\frac{\pi}{5}\right) \qquad \left(\text{ou } \overline{BC} = \frac{2\sin(\frac{\pi}{5})}{\cos(\frac{\pi}{5})}\right).$$

Par Thalès, on a $\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, soit

$$\frac{2-r}{\frac{r}{2}} = \frac{\frac{2}{\cos(\frac{\pi}{5})}}{\frac{2\sin(\frac{\pi}{5})}{\cos(\frac{\pi}{5})}}.$$

En résolvant cette dernière équation, on trouve finalement

$$r = \frac{4\sin(\frac{\pi}{5})}{1+2\sin(\frac{\pi}{5})}.$$

On verra prochainement que de plus, on a la valeur exacte $\sin(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ (que l'on pourrait remplacer dans la formule de r, mais nous ne le ferons pas ici).