

Série 3

Ecole polytechnique Fédérale - Cours Euler - Module d'analyse, Quatrième année

6 septembre 2023

Exercice 1

Calcule toutes les primitives des fonctions suivantes.

$$a(x) = 16x \cdot (3x - 1) \cdot (2x^3 - x^2 + 2)^7 \qquad b(x) = \frac{15}{\cos^2(3x)} - 10 \sin(5x)$$

$$c(x) = \frac{7}{x^2 + 9} \qquad d(x) = -7 \sqrt[4]{(5 - 2x)^3}$$

Exercice 2

Démontre la proposition :

Si f est une fonction impaire et intégrable sur \mathbb{R} , alors toutes ses primitives sont paires sur \mathbb{R} .

Exercice 3

À partir du temps $t = 0$, on verse de l'eau dans un récipient initialement vide avec un débit instantané $d(t) = 2t$ litres par minute.

Simultanément, une partie de cette eau s'échappe avec un débit instantané $v(t) = t^2$ litres par minute, par un trou situé au fond du récipient.

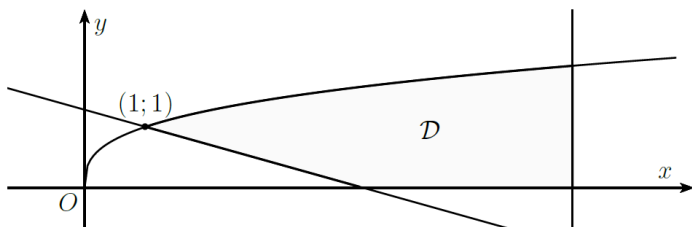
1. Quel volume d'eau le récipient contient-il après 1 minute ?
2. A quel moment le volume d'eau dans le récipient sera-t-il maximal ?
3. A quel moment le récipient sera-t-il à nouveau vide ?
4. Esquisse le graphe de la fonction V exprimant le volume d'eau contenu dans le récipient en fonction du temps t mesuré en minute, pour t compris entre 0 et l'instant où le récipient est à nouveau vide.

Exercice 4

Les graphes des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

ainsi que la droite d d'équation $x = 8$ sont représentés ci-après dans une système d'axes Oxy .



1. Calcule l'aire géométrique du domaine fermé \mathcal{D} compris entre les graphes de f et de g , la droite d et l'axe Ox dans le 1^{er} quadrant.
2. Calcule le volume du corps de révolution résultant de la rotation de \mathcal{D} autour de l'axe Oy .

Exercice 5

Une boule de camphre exposée à l'air libre diminue de volume, tout en gardant sa forme sphérique. La perte de volume est proportionnelle à sa surface externe. Le diamètre de la boule est initialement de 20mm. Il passe à 16mm après six mois.

1. Déterminer $d(t)$ exprimant le diamètre d en mm en fonction du temps t en mois.
2. Après combien de mois le diamètre est-il égal à 10mm ?
3. Après combien de mois la boule disparaît-elle ?

Exercice 6**Cinématique**

D'un pont surplombant une gorge, on lâche une pierre qui est alors soumise à une accélération constante de 9.8 m/s^2 . Le bruit de l'impact avec l'eau est entendu sur le pont après 5.6 secondes. Sachant que la vitesse du son est de 330 m/s , calcule le temps de chute t_c de la pierre ainsi que la hauteur h du pont.

Indication :

Détermine la fonction $d(t)$, définie sur $[0, t_c]$, donnant la distance parcourue par la pierre après t secondes de chute et déduis-en une relation entre les valeurs cherchées.

Fais de même avec la fonction $m(t)$, définie sur $[0, 5.6 - t_c]$, donnant la distance parcourue par le son t secondes après l'impact de la pierre au fond de la gorge.