II. Probabilités

Vous avez vu l'année passée le début de la combinatoire, avec les permutations, les arrangements et les combinaisons. Nous terminons aujourd'hui le sujet de combinatoire avec quelques formules de comptage et commençons le calcul des probabilités, intimement lié à la théorie des ensembles...

1 Les coefficients multinomiaux

Pour terminer le chapitre consacré à la combinatoire, nous généralisons la notion de coefficient binomial.

Définition 1.1. Soit $n_1, \ldots, n_r$ des nombres entiers et $n = n_1 + \cdots + n_r$.
Le *coefficient multinomial* est

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_r!}. \quad = \bar{P}_n(n_1, n_2, \ldots n_r)$$

Lorsque $r = 2$, on voit que $\binom{n}{n_1, n_2}$ est simplement le coefficient binomial

$C^n_{n_1} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2} = C^n_{n_2}$ puisque $n_1 + n_2 = n$

Ce dernier compte le nombre de combinaisons possibles de n_1 objets choisis dans un ensemble de n objets. Ou encore le nombre de manières différentes de répartir n objets en deux groupes, l'un de n_1 éléments et l'autre de n_2 éléments.

Mais que compte-t-on en général avec des coefficients multinomiaux ?

Théorème 1.2. *Le nombre de répartitions possibles de n objets distinguables en r groupes de $n_1, n_2, \ldots, n_r$ objets est égal au coefficient multinomial*

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_r!}.$$

BANANA 6 lettres, 3A, 2N, 1B

$\rightarrow \frac{6!}{3! \cdot 2! \; 1!}$ anagrammes

Démonstration. Procédons par récurrence. Lorsque $r = 2$, c'est la cas binomial connu. Supposons que $r > 2$ et que le cas $r - 1$ est vrai.
Pour répartir n objets en r groupes de $n_1, \ldots, n_r$ éléments, choisissons d'abord n_r éléments pour former le $r^{ème}$ groupe. Il y a $\binom{n}{n_r}$ possibilités. Il reste $n - n_r$ éléments à répartir en $r-1$ groupes de $n_1, n_2 \ldots n_{r-1}$ éléments. Par Hyp. de récurrence, il y a $\binom{n-n_r}{n_1, n_2, \ldots n_{r-1}}$ possibilités.
Par le principe fondamental de la combinatoire, il y a en tout

$$\binom{n}{n_r} \cdot \binom{n-n_r}{n_1 \ldots n_{r-1}} = \frac{n!}{\cancel{(n-n_r)!}\, n_r!} \cdot \frac{\cancel{(n-n_r)!}}{n_1!\, n_2! \ldots n_{r-1}!} = \binom{n}{n_1, \ldots n_r} \qquad \square$$

Exemple 1.3. Dans un camp, 14 élèves doivent choisir l'une des activités suivantes : canoé, escalade ~~et~~ ou spéléologie. Sachant qu'il y a trois canoés de 2 places, dont une est occupée par le moniteur, 4 baudriers disponibles, et 5 lampes de poches, combien de répartitions y a-t-il ?

Il y a $\binom{14}{5, 4, 5} = \frac{14!}{5!\ 4!\ 5!} = 252'252$ possibilités.

Pour terminer, voici le *Théorème multinomial*, qui généralise celui du binôme de Newton. La preuve est élémentaire.

Théorème 1.4. *On a* $\quad (x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{(n_1, \ldots, n_r)} \binom{n}{n_1, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}.$

2 Répartitions des boules dans des urnes

Voici une application des principes combinatoires que vous avez vus l'année passée. Le problème est de répartir n boules identiques dans r urnes.

Exemple 2.1. On cherche à répartir 8 boules noires dans 3 urnes. On peut par exemple en placer 3 dans la première urne, puis une dans la deuxième, et 4 dans la dernière.
Pour compter le nombre de répartitions possibles, imaginons que nous alignions les huit boules comme ceci :

$$\bullet\ \bullet\ \bullet \,|\, \bullet \,|\, \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet$$

Il faut former trois groupes. Si on veut qu'il y ait au moins une boule par urne, il faut donc placer deux barres (séparateurs) dans deux espaces différents entre les boules.

Ici, 2 barres dans 7 espaces $\Longrightarrow \binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\,2!} = 21$ façons.

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Théorème 2.2. *Le nombre de répartition de n boules identiques en r urnes distinctes est*

$$\binom{n-1}{r-1}$$

si chaque urne doit contenir au moins une boule et que $r \leq n$.

Et si l'on autorise des urnes vides ? Dans la résolution précédente, on pourra donc placer plusieurs barres verticales au même endroit, y compris avant la première boule ou après la dernière.

Théorème 2.3. *Le nombre de répartition de n boules identiques dans r urnes distinctes est*

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \bar{P}_{n+r-1}(r-1, n)$$

si l'on peut laisser certaines urnes vides.

Démonstration. Cette fois, il s'agit simplement d'aligner n boules et $r-1$ séparateurs :

c'est une permutation de $r-1+n$ élément avec répétitions.

Il y a donc $\frac{(n+r-1)!}{(r-1)!\,n!} = C_n^{n+r-1} = C_{r-1}^{n+r-1}$ possibilités. □

Exemple 2.4. Monsieur et Madame Aubert ont fait quelques économies et pensent que le moment est venu d'investir 20000 francs en bourse. Ils peuvent placer un certain nombre de milliers de francs en actions suisses, en actions de la zone Euro, en action américaines, ou encore en obligations. Combien de stratégies se présentent ?

$$\binom{20+4-1}{4-1} = \binom{23}{3} = \frac{23\cdot 22\cdot 21}{3\cdot 2\cdot 1} = 23\cdot 11\cdot 7 = 1771.$$

3 Les événements

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont on connait à l'avance les issues possibles, bien que l'on ne sache pas laquelle sera finalement réalisée.

On appelle *ensemble fondamental* l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire. On le note S.

Les éléments de S et tout sous-ensemble de S sont des *événements*.

Exemple 3.1. Si on lance une pièce de monnaie, l'ensemble fondamental $S = \{P, F\}$, où P est l'abréviation de pile et F celle de face.

Si l'expérience consiste à lancer deux dés, alors il y a $6 \cdot 6 = 36$ issues possibles et

$$S = \{(i;j) \,|\, 1 \leq i, j \leq 6\}.$$

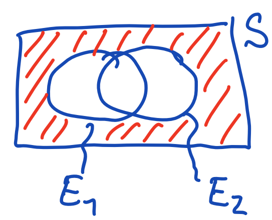
L'issue $(3;6)$ ou encore l'issue $\{(i;i) \,|\, 1 \leq i \leq 6\}$ sont des événements ; le second est l'événement "les deux dés indiquent le même résultat".

Dans ces deux exemples, l'ensemble fondamental est fini, mais il se peut aussi qu'il soit infini.

Dans le cas où l'expérience consiste à mesurer la durée de vie en heures d'une ampoule économique, on a $S = \mathbb{R}_+ = [0, \infty[$. Ici $E = [0; 24]$ est l'événement "l'ampoule dure moins d'un jour".

On utilisera les notations usuelles de la théorie des ensembles pour effectuer des opérations sur des événements. Ainsi, si E et F sont deux événements, l'événement E^c est le *complémentaire* de E, c'est-à-dire l'événement où l'issue est n'importe quel résultat qui ne se trouve pas dans E. L'*intersection* $E \cap F$, aussi notée EF, est l'événement où l'issue est à la fois dans E et dans F. Les lois de De Morgan sont des principes élémentaires, mais fort utiles !

$n = 2$

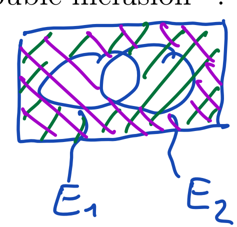


Proposition 3.2. Lois de De Morgan
Soient $E_1, \ldots, E_n$ des événements. Alors

$$\left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c = \cap_{i=1}^n E_i^c \text{ et } \left(\cap_{i=1}^n E_i\right)^c = \cup_{i=1}^n E_i^c.$$

Démonstration. Pour démontrer la première loi, nous allons voir que l'on a la "double inclusion" :

$$\left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c \subset \cap_{i=1}^n E_i^c \quad \text{et} \quad \cap_{i=1}^n E_i^c \subset \left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c.$$



Pour la première inclusion, considérons un élément $x \in \left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c$.

$$x \in \left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)^c \Rightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^n E_i \Rightarrow x \notin E_i, \forall i \Rightarrow x \in E_i^c, \forall i \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^n E_i^c$$

La deuxième inclusion se fait en exercice dans la série 2.
Pour démontrer la seconde loi de Morgan, définissons $F_i = E_i^c$.

Par la $1^{ère}$ loi, $\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$ car $\left(E_i^c\right)^c = E_i$.

En prenant les complémentaires des deux expressions extrêmes :

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c .$$

□

Remarque 3.3. Un peu d'histoire. Auguste De Morgan (1806 - 1871) est un mathématicien et logicien britannique, né en Inde. Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne.

4 Les axiomes des probabilités

Comment définir la probabilité d'un événement ? L'idéal serait de pouvoir faire l'expérience un grand nombre de fois et de noter les résultats. Par exemple, si on lance une pièce de monnaie 20 fois de suite, il se pourrait que ce soit la suite

$$PPFPFFPFPFFFPFFPPFPF$$

qui soit lancée. On pourrait donc dire que 9 fois sur 20 on tombe sur pile. La probabilité de lancer pile doit donc être environ $9/20 = 0,45$. On dit aussi qu'on a environ 45% de chances de lancer pile. Mais il faudrait lancer la pièce encore bien plus de fois et la probabilité de lancer pile sera la limite lorsque n tend vers l'infini du nombre de lancers qui donnent pile divisé par le nombre de lancers au total... Mais ce nombre est-il bien défini ? Et de plus peut-on le calculer ?

Au lieu de procéder comme cela, nous décidons d'utiliser une approche axiomatique, basée sur des principes élémentaires et acceptables par tous.

Définition 4.1. Soit S l'ensemble fondamental d'une expérience. Une *probabilité* est une application $P : \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ telle que : $\mathcal{P}(S)$ = ensemble des parties de S.

A. 1. $P(S) = 1$

A. 2. Si les événements $E_1, E_2, E_3, \ldots$ sont disjoints, alors $P\left(\coprod_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \underline{\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)}$.

Le nombre réel $P(E)$ est appelé *probabilité* de l'événement E. ↑ réunion disjointe

On attribue donc un nombre entre zéro et un à chaque événement. Plus ce nombre est grand, plus la probabilité de cet événement est grande. C'est pourquoi le premier axiome dit simplement que l'issue de l'expérience est à coup sûr (avec une probabilité égale à 1) l'un des éléments de S. Le deuxième axiome dit que la probabilité de l'union d'une infinité d'événements mutuellement exclusifs est la somme des probabilités de chacun d'eux.

Exemple 4.2. On lance un dé comme l'un de ceux que tu vois sur cette photo truquée :

Il se trouve que le coin commun aux faces 4, 5 et 6 est plombé si bien que l'on lance deux fois plus souvent un grand nombre qu'un petit nombre. Quelle est la probabilité de lancer un nombre pair ? L'hypothèse de départ est donc que

$$P(4) = P(5) = P(6) = 2 \cdot P(1) = 2 \cdot P(2) = 2 \cdot P(3)$$

D'autre part, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1\} \amalg \{2\} \amalg \{3\} \amalg \ldots \amalg \{6\}$

$$1 \overset{A1}{=} P(S) \overset{A2}{=} P(1) + P(2) + \ldots + P(6)$$
$$= 3P(1) + 6P(1) = 9P(1) \Rightarrow P(1) = \frac{1}{9}$$

et $P(4) = \frac{2}{9}$

$$P(\text{pair}) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{5}{9} \simeq 55{,}6\%$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9}$$

Déduisons à présent quelques propriétés élémentaires à partir des axiomes. Ces propriétés seront donc toujours vraies ! Si l'on s'intéresse comme dans l'exemple ci-dessus au lancer d'un dé, ces propriétés ne nous dirons pas si le dé est pipé ou non... La première de ces propriétés affirme que la probabilité de l'événement "vide" est nulle car on n'a aucune chance de ne pas avoir d'issue à une expérience.

Proposition 4.3. *On a* $P(\emptyset) = 0$.

Démonstration. Considérons les événements mutuellement exclusifs $E_1 = S$, $E_2 = \emptyset$, $E_3 = \emptyset$, etc. Alors nous savons que

$$1 \overset{A1}{=} P(S) \overset{A2}{=} P(S) + \underbrace{P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots}_{=0}$$

Donc $P(\emptyset) = 0$ □

Ceci nous permet dans un premier temps de montrer que l'axiome (2) est vrai aussi si on traite le cas d'une union disjointe *finie* d'événements. Il suffit d'appliquer le deuxième axiome en ajoutant un nombre infini d'événements vides.

Théorème 4.4. *Soit* $E_1, \ldots, E_n$ *des événements. Alors* $P\left(\coprod_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$.

Le résultat suivant nous dit que la probabilité qu'un événement n'arrive pas vaut 1 moins la probabilité que cet événement arrive.

Théorème 4.5. *Soit* E *un événement. Alors* $P(E^c) = 1 - P(E)$.

démo : $E^c \cup E = S$
et $E^c \cap E = \emptyset$
d'où $1 \overset{A1}{=} P(S) \overset{A2}{=} P(E) + P(E^c)$

Si F est un événement contenu dans E, alors E est plus probable que F.

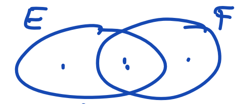
Théorème 4.6. *Soient* $F \subset E$ *des événements. Alors* $P(F) \leq P(E)$.

Démonstration. Puisque F est contenu dans E, on peut exprimer E comme union disjointe de F et de l'événement $F^c \cap E$. Par conséquent, on a $P(E) = P(F) + P(F^c \cap E)$ ce qui montre le théorème. □

Voici peut-être la formule élémentaire la plus utile en pratique :

Théorème 4.7. *Soient E et F deux événements. Alors* $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$.

Démonstration.



On peut écrire $E \cup F = (E \setminus F) \sqcup (F \setminus E) \sqcup (E \cap F)$

Par ailleurs $E = (E \setminus F) \sqcup (E \cap F)$ et $F = (F \setminus E) \sqcup (E \cap F)$

$$P(E \cup F) \overset{A2}{=} \underbrace{P(E \setminus F) + P(E \cap F)}_{P(E)} + \underbrace{P(F \setminus E) + P(E \cap F)}_{P(F)} - P(E \cap F)$$

$$= P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

□

Exemple 4.8. On tire 13 cartes d'un jeu de 52. Déterminer la probabilité que exactement trois de ces cartes soient des rois. ou que exactement 2 soient des dames.

$$P(3R \text{ ou } 2D) = P(3R) + P(2D) - P(3R \text{ et } 2D)$$

$$= \frac{C_3^4 \cdot C_{10}^{48}}{C_{13}^{52}} + \frac{C_2^4 \cdot C_{11}^{48}}{C_{13}^{52}} - \frac{C_3^4 \cdot C_2^4 \cdot C_8^{44}}{C_{13}^{52}} = \dots$$

Exemple 4.9. Quelle est la probabilité que deux élèves du cours Euler (il y en a 25) aient leur anniversaire le même jour ?

Supposons qu'il y a 365 jours dans l'année et que les naissances sont réparties uniformément dans l'année.

$$\Rightarrow \quad |S| = 365^{25} = \bar{A}_{25}^{365}$$

Nombre de répartitions des anniversaires sans répétition de date :

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots\ldots = A_{25}^{365}$$

$$\Rightarrow P(\text{aucun élève du même jour}) = \frac{A_{25}^{365}}{\bar{A}_{25}^{365}} \simeq 0{,}4313 = 43{,}13\%$$

$$\Rightarrow P(\text{au moins un duo du même jour}) = 1 - 0{,}4313 = 56{,}87\%.$$