

## Série 2

Ecole polytechnique Fédérale - Cours Euler - Module d'analyse, Quatrième année

le 30 août 2023

### Problèmes obligatoires

#### Exercice 1

**Cône de révolution.** Calcule l'aire du cône de révolution de hauteur  $h$  et de rayon  $r$  de trois manières différentes.

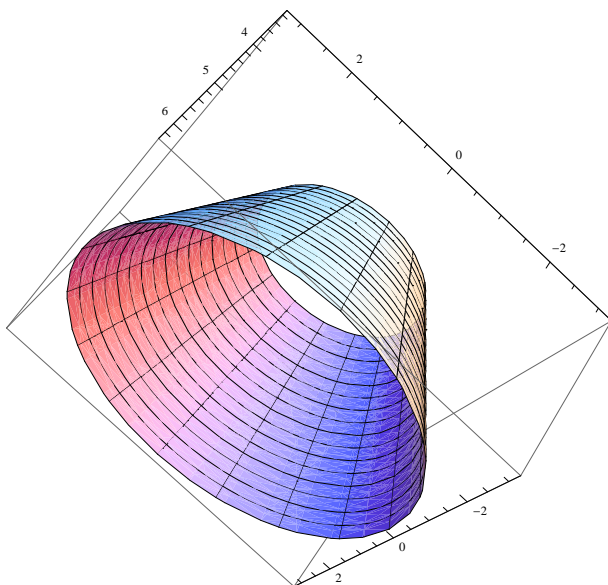
Méthode 1 : Calcule l'aire du secteur plan obtenu en développant la surface du cône.

Méthode 2 : Découpe la surface du cône en  $n$  secteurs égaux à approcher par des triangles isocèles de base  $2\pi r/n$  et dont la hauteur est à déterminer.

Méthode 3 : Utilise le calcul intégral et la formule vue au cours.

#### Exercice 2

**Cône de révolution tronqué.** Calcule l'aire d'un cône de révolution tronqué. On supposera que le rayon du cercle de base vaut  $R$ , celui du "couvercle"  $r$  et la hauteur  $h$ .



Tu peux déduire le résultat de l'exercice précédent, et ensuite faire le calcul par le biais d'une intégrale.

#### Exercice 3

**Tonneau.** Calcule l'aire du tonneau obtenu en faisant tourner autour de l'axe horizontal  $Ox$  le graphe de la fonction  $f(x) = \sin x$  définie sur  $[\pi/6, 5\pi/6]$ . Calcule ensuite son volume.

**Exercice 4**

**Vrai ou faux ?** Justifie brièvement tes réponses, en construisant un contre-exemple élémentaire lorsque c'est possible.

1. L'aire totale du domaine délimité par le graphe d'une fonction est toujours positive.
2. L'aire du cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $2r$  est plus grande que celle de la sphère de rayon  $r$  qu'il contient.
3. Soient  $D$  et  $D'$  deux domaines de même aire se trouvant dans le plan  $Oxz$ . Alors les deux volumes de révolution obtenus en faisant tourner  $D$  et  $D'$  autour de  $Ox$  ont même volume.
4. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment dérivable. Alors l'intégrale  $\int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$  est toujours positive (ou nulle) puisqu'elle calcule une aire.

**Exercice 5**

Calcule le volume du cône de révolution de hauteur  $h$  et dont la base est un disque de rayon  $r$ .

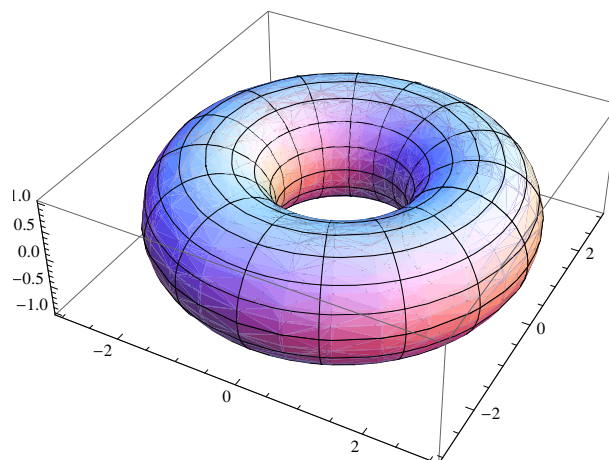
**Exercice 6**

Calcule le volume de l'hyperboloïde de révolution d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1$  pour  $1 \geq z \geq -1$ .

**Exercices théoriques obligatoires****Exercice 7**

**Différence de volumes.** Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions réelles continues et supposons que  $g(x) \geq f(x) \geq 0$  pour tout  $x$ . On suppose encore que  $f(a) = g(a)$  et  $f(b) = g(b)$ . On considère le corps de révolution  $K$  obtenu en faisant tourner autour de l'axe  $Ox$  les graphes de  $f$  et de  $g$ .

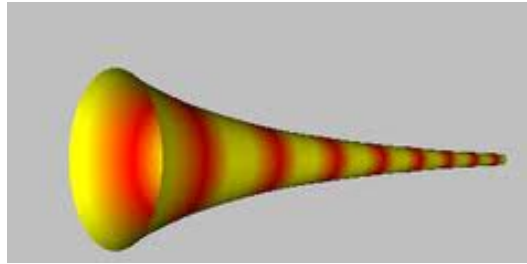
1. Montre que le volume de ce corps de révolution est égal à la différence des volumes des corps de révolution  $K_g$  obtenu en faisant tourner le graphe de  $g$  autour de  $Ox$  et  $K_f$  obtenu en faisant tourner le graphe de  $f$  autour de  $Ox$ .
2. Calcule le volume du tore de révolution obtenu en faisant tourner autour de  $Ox$  le disque de rayon 1 centré en  $(0; 2)$ .



3. Calcule le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner autour de  $Ox$  la surface comprise entre les graphes de  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ .

**Exercice 8**

**Le paradoxe de la trompette de Gabriel.** On considère la surface de révolution obtenue en faisant tourner la fonction  $\frac{1}{x+1}$  autour de l'axe  $Ox$  pour  $0 \leq x < \infty$  :



1. Calcule le volume et la surface de la trompette de l'archange Gabriel décrite ci-dessus.
2. Explique comment résoudre le paradoxe de la peinture de cet instrument.

**Exercice 9**

Calculer l'aire du tonneau obtenu en faisant tourner autour de l'axe horizontal  $Ox$  le graphe de la fonction  $f(x) = 2 - x^2$  définie sur  $[-1, 1]$ . Calculer ensuite son volume.

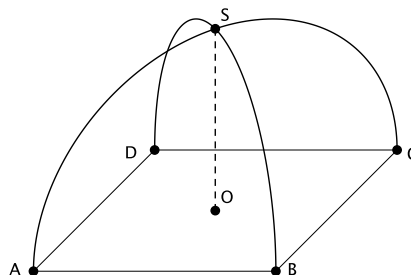
Pour le calcul de l'aire, on utilise les formules suivantes sans démonstration :

$$\int \sqrt{1+u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2+1} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{u^2+1}) + C.$$

$$\int u^2 \sqrt{1+u^2} du = \frac{u}{4} \sqrt{(u^2+1)^3} - \frac{u}{8} \sqrt{u^2+1} - \frac{1}{8} \ln(u + \sqrt{u^2+1}) + C$$

**Exercice 10**

On considère une tente igloo de base carrée, soutenue par deux arceaux reliant les sommets opposés de la base. La diagonale de la base carrée  $ABCD$  vaut  $2r$ . Chacun des arceaux forme un arc de cercle centré en  $O$ , le milieu de la base de la tente. On considère que les arceaux se coupent au point  $S$  situé à l'aplomb de  $O$  et que la toile de la tente est parfaitement tendue.



1. Calcule en fonction de  $r$  le volume de la tente igloo en utilisant une intégrale appropriée.
2. Calcule en fonction de  $r$  le volume de la pyramide de base  $ABCD$  et de sommet  $S$  ainsi que le volume de la demi sphère de rayon  $OS$ . Observe le rapport entre les trois volumes obtenus.