Cours Euler: Corrigé 34

le 21 juin 2023

Exercice 1

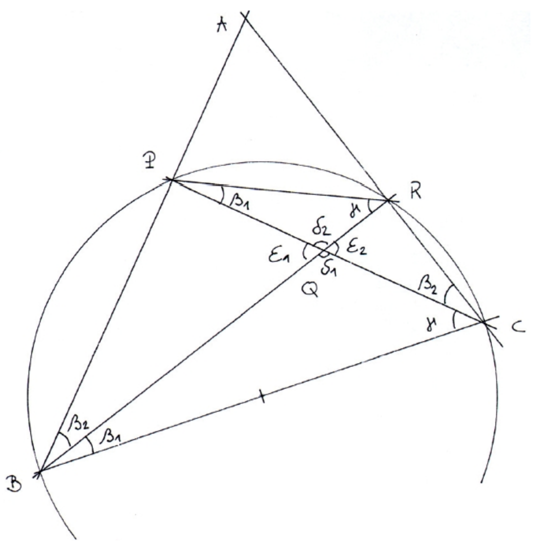
(1) Si deux triangles rectangles ont un angle aigu isométrique, alors ils ont en automatiquement deux (puisqu'ils ont aussi leur angle droit isométrique). On peut donc appliquer le premier cas de similitude des triangles.

(2) Les angles d'un triangle isocèle sont complétement déterminés par la donnée d'un seul des trois angles. En effet, si on connaît par exemple son angle au sommet α, alors les deux autres angles mesurent $\frac{180-\alpha}{2}$. Si on connaît un angle de la base β, alors on connaît aussi l'autre angle de la base (qui lui est isométrique) et l'angle au sommet mesure $180 - 2\beta$.
Ainsi, deux triangles isocèles qui ont un angle isométrique ont tous leurs angles isométriques. On applique alors le premier cas de similitude.

(3) Les angles d'un triangle équilatéral mesurent tous 60°. Par le premier cas de similitude, tous les triangles équilatéraux sont donc isométriques.

Exercice 2

Considérons la figure



Comme $\widehat{BRC} = \widehat{CPB} = 90°$, P et R appartiennent au cercle de Thalès de BC. Donc
$\widehat{RBC} = \widehat{RPC} = \beta_1$ (angles inscrits qui coupent RC)
$\widehat{PBR} = \widehat{PCR} = \beta_2$ (angles inscrits qui coupent PR)
$\widehat{BCP} = \widehat{BRP} = \gamma$ (angles inscrits qui coupent BP)
De plus, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ et $\delta_1 = \delta_2$, car ce sont des angles opposés par le sommet.

i) Les triangles $\triangle BQP$ et $\triangle CQR$ sont semblables car ils ont deux angles isométriques (premier cas de similitude). Sébastien a donc raison.

ii) Les angles du triangle $\triangle APR$ sont aigus puisque $\widehat{APR} = 90 - \beta_1$, $\widehat{ARP} = 90 - \gamma$ et $\widehat{BAR} = 90 - \beta_2$.
Par ailleurs, ε_1 est aigu $(90 - \beta_2)$ donc δ_2 est obtu $(180 - \varepsilon_1)$

Finalement, le triangle $\triangle APR$ ne possède que des angles aigus alors que le triangle $\triangle PQR$ possède un angle obtu. Ils ne peuvent donc pas être semblables et Nicolas a tort. Les triangles $\triangle QPR$ et $\triangle QBC$ sont semblables, car ils ont deux angles isométriques (premier cas de similitude). Alexandre a donc raison.

iii) Alexandre ayant raison, le triangle $\triangle QBC$ ne peut pas être semblable au triangle $\triangle APR$, puisque celui-ci n'est pas semblable au triangle $\triangle QPR$ (voir n. 2). Mathieu a donc tort.

iv) Les triangles $\triangle BRA$ et $\triangle CPA$ ont deux angles isométriques. Ils sont donc semblables par le premier cas de similitude et Amélie a raison.

Exercice 3

Théorème des bissectrices. Soit D le point d'intersection de la parallèle à AC passant par B et la droite AP. Le théorème de Thalès appliqué à $\triangle PAC$ et $\triangle PDB$ nous donne l'égalité

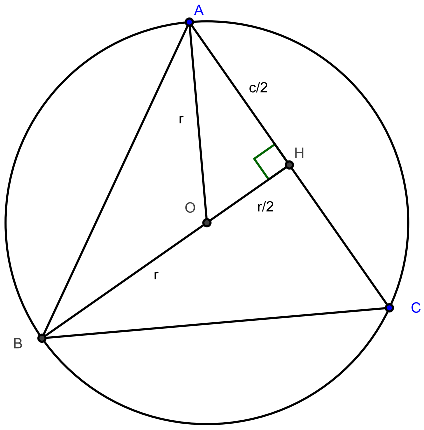
$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}.$$

Ainsi on a $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ si et seulement si $\overline{BD} = \overline{BA}$. C'est-à-dire si et seulement si le triangle DBA est isocèle en B. Ceci est équivalent à $\widehat{BDA} = \widehat{BAP}$. Or, $\widehat{BDA} = \widehat{PAC}$ comme ces deux angles sont alternes-internes par rapport aux parallèles AC, BD et à la transversale AD. On conclut que $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ est équivalent à $\widehat{PAC} = \widehat{BAP}$, c'est-à-dire à l'affirmation que AP est la bissectrice de l'angle en A.

Exercice 4

(1) Deux côtés de chacun de ces triangles sont égaux au rayon du cercle, les triangles sont donc isocèles. Ces triangles ont trois côtés isométriques, les deux côtés égaux au rayon et le dernier côté car le polygone est régulier. Par le troisième cas d'égalité des triangles ils sont donc tous isométriques. Si le polygone régulier a n côtés, alors il y a n triangles et donc l'angle au centre est égal à $\dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{360^\circ}{n}$.

(2) Ce polygone s'appelle le triangle équilatéral. Notons r le rayon du cercle et c la longueur du côté cherchée. Traçons la hauteur issue de B qui coupe $[AC]$ en H. Comme le triangles est équilatéral, les hauteurs et les médianes du triangle sont confondue, ainsi $|AH| = |CH| = \frac{c}{2}$ et $|BH| = \frac{3}{2}r$ (dans tout triangle, les médianes se coupent au tiers de leur longueur). Ceci nous permet de donner la longueur de $|OH| = \frac{3}{2}r - r = \frac{1}{2}r$. Traçons le segment $[OA]$ de longueur r.



Alors par le Théorème de Pythagore dans le triangle $\triangle AOH$:

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Leftrightarrow c^2 = 3r^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{3}r.$$

(3) Ce polygône est un carré. Traçons deux segements reliant le centre du cercle O à deux sommets consécutifs du carré A et B. Ceci détermine un triangle rectangle $\triangle OAB$ rectangle en O. Par le théorème de pythagore, $c^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$ et donc $c = \sqrt{2}r$.

(4) Ce polygone est un hexagone régulier. En reliant deux sommets consécutifs au centre du cercle, on obtient un triangle isocèle dont l'angle au centre est de $\dfrac{360°}{6} = 60°$ (voir le point (1)). Ainsi ce triangle est équilatéral et donc $c = r$.

(5) Le triangle $\triangle AOB$ est isocèle de sommet O. Son angle en O mesure 36° ; les angles en A et B égalent tous deux 72°. Comme BC est la bissectrice de l'angle en B, il s'ensuit que l'angle $\widehat{OBC}$ mesure 36°, tandis que l'angle $\widehat{ACB}$ mesure 72° (somme des angles du triangle $\triangle ABC$). Les triangles $\triangle OCB$ et $\triangle ABC$ sont donc isocèles et ainsi $|AB| = |BC| = |OC|$. Le théorème des bissectrices nous permet d'écrire :

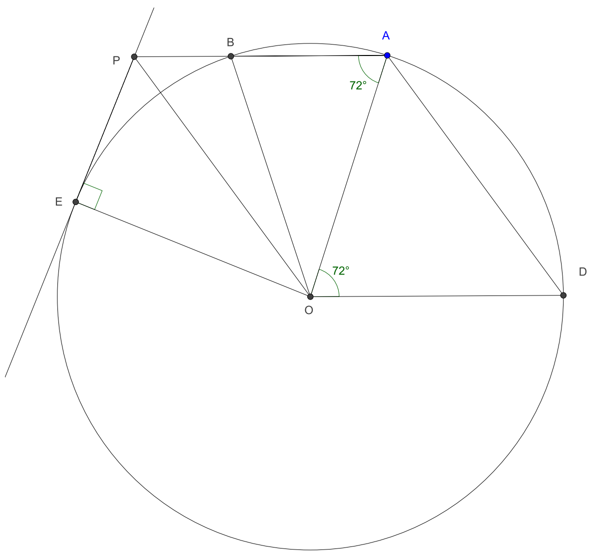
$$\frac{|OC|}{|AC|} = \frac{|OB|}{|AB|},$$
$$\frac{x}{y} = \frac{r}{x},$$
$$x^2 = ry.$$

Ainsi $x^2 = r(r-x) = r^2 - rx$ et donc $x^2 + rx - r^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-r \pm \sqrt{5r^2}}{2} = \dfrac{\pm\sqrt{5}-1}{2}r$, comme on peut exclure la solution négative de l'équation quadratique, on a que

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r.$$

(6) L'angle $\widehat{AOD}$ vaut 72° car c'est l'angle au centre du pentagone régulier. Comme $ODAP$ est un parallèlogramme, les droites OD et AP sont parallèles et donc l'angle $\widehat{OAP}$ vaut 72° (angles alternes-internes). Le triangle $\triangle OAB$ est isocèle en O car $|OA| = |OB| = r$, ainsi l'angle $\widehat{ABO}$ vaut 72° et par suite l'angle $\widehat{AOB}$ vaut 36°, c'est l'angle au centre du décagone régulier.

(7) Notons c_5, c_6 et c_{10} les côtés respectivement du pentagone, de l'héxagone et du décagone réguliers.



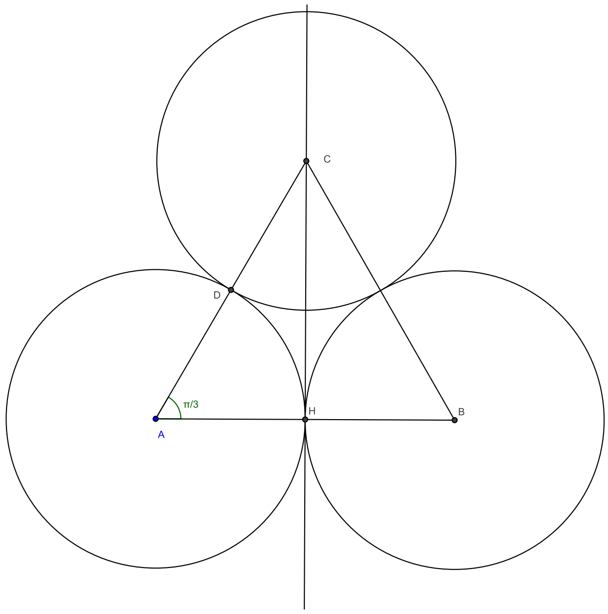
Par le point (5) ci-dessus, $|AB| = c_{10}$ et $|AB|^2 = |PA||PB|$ (car $|AP| = |OD|$). La droite PE est tangente au cercle et la droite PA coupe le cercle en B ainsi :

$$|PE|^2 = |PA||PB|.$$

Ainsi $|PE| = |AB| = c_{10}$, $|OE| = r = c_6$ et $|OP| = |AD| = c_5$.

Exercice 5

Traçons ces trois soucoupes de rayon $r = 50mm$, relions les trois centres, on obtient le triangle $\triangle ABC$. Soit H le pied de la hauteur issue de C et D l'intersection de $[AC]$ avec une soucoupe.



Le triangle $\triangle ABC$ est équilatéral car chacun des côtés mesure $2r$, ainsi l'angle $\widehat{CAB}$ mesure $60° = \frac{\pi}{3}$rad. Nous allons calculer l'aire du triangle $\triangle ABC$ auquel nous enleverons l'aire des trois secteurs circulaire d'aire égal à celui du secteur ADH. Par le théorème de Pythagore, $|CH|^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$ et donc $|CH| = \sqrt{3}r$. Ainsi $\sigma(\triangle ABC) = \frac{2r\sqrt{3}r}{2} = \sqrt{3}r^2$. Comme l'aire du secteur circulaire ADH vaut $\frac{\pi r^2}{6}$ (Exercice 7), l'aire de la région entre les soucoupes vaut :

$$\sqrt{3}r^2 - 3\frac{\pi r^2}{6} = (\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})r^2 = 403.14 \text{ mm}^2.$$

Exercice 6

L'aire du cercle vaut πr^2 et celle du carré vaut $\frac{r^2}{2}4 = 2r^2$, si bien que l'aire de la région comprise entre le cercle et le carré inscrit vaut

$$\pi r^2 - 2r^2 = (\pi - 2)r^2.$$

Exercice 7

1. Pour un radian, l'aire du secteur vaut $\frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{r^2}{2}$. Et donc pour α radian l'aire vaudra $\frac{\alpha r^2}{2}$. On remarque que si $\alpha = 2\pi$, alors l'aire du secteur vaut $2\pi\frac{r^2}{2} = \pi r^2$, ce qui est bien l'aire du cercle. On procéde de même pour calculer la longueur de l'arc AB. Pour un radian, la longueur de l'arc vaut $\frac{2\pi r}{2\pi} = r$ et donc pour α radian la longueur de l'arc vaudra αr.

2. L'aire du secteur circulaire OAB vaut $\alpha\frac{r^2}{2}$. Calculons l'aire du triangle qu'il faut enlever au secteur circulaire pour obtenir l'aire de la partie hachurée. Par pythagore, $|AH| = \sqrt{r^2 - |OH|^2}$ et

donc $\sigma(\triangle OAB) = |AH||OH| = \sqrt{r^2 - |OH|^2}|OH|$. Ainsi l'aire du segment circulaire vaut

$$\alpha\frac{r^2}{2} - \sqrt{r^2 - |OH|^2}|OH|.$$

Exercice 8

(i) L'aire du triangle $\triangle ABC$ vaut $\dfrac{|AB| \cdot |AC|}{2}$.

(ii) L'aire du demi-cercle de Thalès du segment $|AC|$ vaut $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi|AC|^2}{2^2}$.

(iii) L'aire du demi-cercle de Thalès du segment $|BC|$ vaut $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi|BC|^2}{2^2}$.

(iv) L'aire du demi-cercle de Thalès du segment $|AB|$ vaut $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi|AB|^2}{2^2}$.

(v) L'aire des régions comprises entre les deux lunules et le triangle $\triangle ABC$ vaut (ii)-(i), c'est-à-dire $\dfrac{\pi|AC|^2}{8} - \dfrac{|AB| \cdot |AC|}{2}$.

(vi) L'aire des deux lunules vaut (iii)+(iv)-(v), c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{8}(\underbrace{|AB|^2 + |BC|^2}_{=|AC|^2}) - \dfrac{\pi|AC|^2}{8} + \dfrac{|AB| \cdot |AC|}{2} = \dfrac{\pi}{8}|AC|^2 - \dfrac{\pi}{8}|AC|^2 + \dfrac{|AC| \cdot |AB|}{2} = \dfrac{|AC| \cdot |AB|}{2} = \sigma(\triangle ABC)$, ce qui prouve le théorème.

Exercice 9

(a) Procéder par règle de trois : $\begin{array}{c|c} \alpha & \frac{\pi}{6} \\ \hline 360 & 2\pi \end{array} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\frac{\pi}{6} \cdot 360}{2\pi} = 30°$, les autres réponses sont $18°, 720°, \sim 16.28°$.

(b) De même : $\begin{array}{c|c} \alpha & 45 \\ \hline 2\pi & 360 \end{array} \Rightarrow \alpha = \dfrac{45 \cdot 2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{4}$, les autres réponses sont $\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{2243\pi}{18000} \cong 0.3914$.

(c) 72° correspondent à $\dfrac{2\pi}{5}$, donc les deux angles β du triangle isocèle sont déterminés par

$$2\beta = \pi - \frac{2\pi}{5},$$

car la somme des angles d'un triangle vaut π et donc $\beta = \dfrac{3\pi}{10}$.

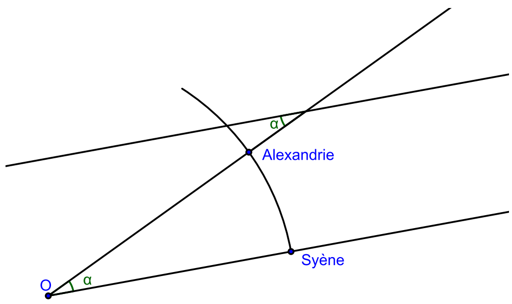
Exercice 10

Le rayon r de la roue est égal à $\frac{0.75}{2}$. Si la voiture roule à 72 km/h, en une heure elle parcourt 72000 mètres. Comme la circonférence de la roue vaut $2\pi r$, en un heure la roue aura fait $\dfrac{72000}{2\pi r} \cong 30557.7$ tours. Comme dans une heure il y a 60 minutes, ceci équivaut à $\dfrac{30557.7}{60} \cong 509.3$ tours/minutes.

Exercice 11

La situation est representée dans la figure **??**. Les rayons du soleil arrive à la verticale à Syène et déterminent un angle $\alpha = 7.2°$ avec la verticale à Alexandrie. Comme les rayons du soleil sont supposés parallèles, l'angle « Alexandrie-O-Syène » mesure également α degrés (ces angles sont alternes-internes par rapport aux rayons et à la sécante « O-Alexandrie ». Alors, comme Eratosthène avait mesuré la longueur entre Syène et Alexandrie et que l'on connaît l'angle entre ces deux villes, la circonférence de la terre s'obtient par le calcul suivant :

$$\text{circonférence} = \frac{360 \cdot 787.5}{7.2} = 39375 \text{ km}.$$



Pour estimer le rayon de la terre, on utilise la formule de la circonférence d'un cercle : $c = 2\pi r$ et donc $r = \dfrac{c}{2\pi} \cong 6266.73$ km.

Exercice 12

$$\text{vitesse} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps}} = \frac{2\pi r}{t} = \frac{2\pi \cdot 150000000}{365.26 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \cong 29.9 \text{ km/s}.$$

Exercice 13

On résoudra d'abord (1) et (3) avant le (2).

1) Pour que les roues paraissent immobiles mais tournent quand même, il faut qu'en $\frac{1}{24}$ de seconde la roue tourne d'au moins $\frac{1}{16}$ de tour. En une heure il faut donc que la roue effectue $\frac{24}{16} \cdot 3600 = 5400$ tours. Comme le rayon r de la roue est égal à 0.5m, 5400 tours correspondent à $5400 \cdot 2\pi r \cong 16965$ mètre parcouru en une heure, ce qui équivaut à 16.965 km/h. Une autre solution serait une vitesse nulle pour la diligence. (Les solutions $\frac{2}{16}$, $\frac{3}{16}$ de tours, *etc.* correspondent à des vitesses deux, trois, *etc.* fois plus rapides, des vitesses que le cheval n'est pas capable d'atteindre.)

3) Pour que les roues semblent avoir 32 rayons, il faut qu'en $\frac{1}{24}$ de seconde la roue tourne d'au moins $\frac{1}{32}$ de tour. La roue doit donc tourner deux fois moins vite qu'au point 1) et il suffit donc simplement de diviser la solution du 1) par deux : 8.482 km/h. (Une autre solution est trois fois cette vitesse, ce qui est encore une fois trop rapide pour le cheval.)

2) Pour que les roues semblent reculer, il faut qu'entre deux images la roue ait tourné de plus de $\frac{1}{32}$ de tour et de moins de $\frac{1}{16}$ de tour. Comme cela, à chaque image un rayon se sera déplacé assez vers l'avant pour rejoindre presque la position du barreau suivant et sera ainsi plus proche du barreau suivant que de sa position à l'image précédente, la roue semblera reculer.

Exercice 14

1) L'assertion est fausse, en effet les nombres $2\pi > 0$ et 0 ne sont pas égaux. Par contre les angles 2π et 0 sont indiscernables.

2) L'aire du grand cercle vaut $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$, tandis que l'aire du petit cercle vaut $\pi \cdot 1^2 = \pi$. Ainsi l'aire de la couronne vaut $4\pi - \pi = 3\pi$, l'assertion est donc vraie.

3) C'est vrai. On inscrit un héxagone dans un cercle de rayon 1. Alors le périmètre de l'héxagone vaut 6 et ce périmétre est strictement plus petit que la circonférence du cercle qui vaut 2π. Ainsi $6 < 2\pi$, autrement dit $\dfrac{\pi}{3} > 1$.