Définition 2.4. Soit X un ensemble de k éléments $x_1, \dots, x_k$. Une *permutation de n objets avec $r_1, r_2, \dots, r_k$ répétitions* de X est un n-uplet d'éléments de X où x_i apparaît exactement r_i fois.

En particulier, on a $r_1 + \cdots + r_k = n$. On peut aussi penser à ces permutations avec répétitions de la manière suivante. Soit X un ensemble de n éléments dans lequel il y a des sous-ensembles de $r_1, \dots, r_k$ objets identiques. Une permutation avec répétitions de X est une permutation de X où l'ordre des objets indistingables n'est pas pris en compte.

Théorème 2.5. *Le nombre de permutations de n avec $r_1, r_2, \dots r_k$ répétitions est* $\overline{P}_n(r_1; \dots; r_k) = \dfrac{n!}{r_1! \dots r_k!}$.

Démonstration. Ce résultat reviendra dans un prochain cours, où nous le démontrerons. □

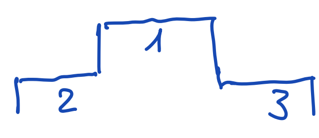
Exemple 2.6. On veut classer 6 livres de Jules Verne dans un rayon de librairie : 2 exemplaires de "20000 lieues sous les mers", 3 exemplaires de "5 semaines en ballon" et 1 seul du "Tour du monde en 80 jours". De combien de manières peut-on le faire ?

On a $\dfrac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$ possibilités

3 Arrangements et combinaisons

Définition 3.1. Soit X un ensemble de n éléments distincts. Un *arrangement* de r éléments de X est une disposition ordonnée de r éléments de X. On note A_r^n le nombre de ces arrangements.

Exemple 3.2. Trente-deux équipes participent à la coupe du monde de football. Combien de podiums possibles y a-t-il ?



1er 2e 3e

$32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$ podiums possibles

Le même raisonnement permet de calculer le nombre d'arrangements.

Proposition 3.3. $A_r^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Exemple 3.4. Mélissa (3 ans) possède 3 animaux en peluche : un ours, un kangourou et une souris. Elle aime les placer sur un canapé à 5 places. De combien de manières différentes peut-elle le faire ?

On doit choisir 3 places parmi les 5 du canapé $\Rightarrow A_3^5 = 60$ choix possibles

Définition 3.5. Soit X un ensemble de n éléments distincts et $r \leq n$. Un *arrangement avec répétitions* de r éléments de X est une disposition ordonnée de r éléments non nécessairement distincts de X. On note $\overline{A_r^n}$ le nombre de ces arrangements avec répétitions.

Proposition 3.6. $\overline{A_r^n} = n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^r$.

Exemple 3.7. Combien de mots de trois lettres (de a à z) peut-on former ?

$$\underset{26}{\square} \cdot \underset{26}{\square} \cdot \underset{26}{\square} = 26^3 = 17576$$

Définition 3.8. Soit X un ensemble de n éléments distincts. Une *combinaison* de r éléments de X est une disposition non ordonnée de r éléments de X. On note C_r^n le nombre de ces combinaisons.

Exemple 3.9. Au SwissLotto, on tire 5 nombres entre 1 et 45. Combien de tirages différents y a-t-il ? Il y a A_5^{45} arrangements, mais puisqu'on ne tient pas compte de l'ordre des éléments (le tirage $5, 32, 40, 10, 3$ est le même que $40, 3, 32, 5, 10$), il faut encore diviser par 5!. Il y a donc $\dfrac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1221759$ tirages de lotto différents. Chaque joueur doit donc être bien conscient qu'il a moins d'une chance sur un million de gagner ! Cela fait moins de $0,0001\%$...

Théorème 3.10. $C_r^n = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$.

Exemple 3.11. Dans une classe de 10 élèves, combien a-t-on de choix de 3 personnes pour organiser une fête ?

On doit choisir 3 élèves parmi les 10 (ordre du choix pas important)

$\Rightarrow C_3^{10} = 120$ choix possibles

Le nombre de combinaisons C_r^n est aussi appelé *coefficient binomial* pour des raisons que nous allons voir tout de suite. La proposition suivante donne une relation entre les combinaisons de n éléments et celles de $n-1$ éléments.

Proposition 3.12. *On a* $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$ *pour* $1 \leq r \leq n-1$.

Démonstration. Voici un argument combinatoire pour démontrer cette égalité. Soit X un ensemble de n objets et x l'un d'entre eux. Les combinaisons de r objets peuvent être classées en deux groupes, celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas. Il y a $\begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$ combinaisons qui contiennent x car il faut simplement former une combinaison de $r-1$ éléments de $X-\{x\}$ et $\begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix}$ combinaisons qui ne contiennent pas x car il s'agit des combinaisons de r éléments de $X-\{x\}$. $\square$

Exemple 3.13. Un relais radiophonique est mis en place à l'aide de n antennes, dont m sont défectueuses. Le relais ne fonctionne que si deux antennes défectueuses ne sont jamais côte à côte. Combien peut-on trouver de configurations qui fonctionnent ?

D A

Imaginons les $n-m$ antennes qui fonctionnent, alignées comme ceci :

$$\overset{\downarrow}{-}F\overset{\downarrow}{-}F\overset{\downarrow}{-}F\ldots\overset{\downarrow}{-}F\overset{\downarrow}{-}F\overset{\downarrow}{-}$$

où F indique une antenne qui fonctionne et $-$ une place pour une éventuelle antenne défectueuse. Il y a donc $n-m+1$ positions où on peut installer une telle antenne. On doit en choisir m si bien que la réponse est $\begin{pmatrix} n-m+1 \\ m \end{pmatrix}$.

Le nombre de combinaisons C_k^n est aussi appelé *coefficient binomial* pour des raisons que nous allons voir maintenant. La notion de combinaison permet en effet d'établir une formule particulièrement utile :

Théorème 3.14 (Binôme de Newton)**.** *On a* $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k y^{n-k}$.

$$\binom{n}{0}x^0\cdot y^n + \binom{n}{1}x^1\cdot y^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}x^n y^0$$

Démonstration. Considérons le produit

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\ldots(x_n+y_n).$$

Lorsque l'on développe cette expression, on obtient 2^n termes, chaque terme étant un produit de n facteurs (des x_i et des y_j). De plus, chacun de ces termes contient soit x_i, soit y_i pour tout $1 \leq i \leq n$. Il nous faut maintenant compter le nombre de termes qui contiennent exactement k facteurs x_i et $(n-k)$ facteurs y_j. Ces facteurs correspondent au choix de "k parmi n" (des combinaisons de k éléments dans un ensemble de n objets), c'est-à-dire $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. On obtient donc la formule en posant $x_i = x$ et $y_i = y$ pour tout i. $\square$

Remarque 3.15. Un peu d'histoire. Isaac Newton (1643-1727) est un philosophe, mathématicien, physicien et astronome anglais.

Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour sa théorie de la gravitation universelle et la création, en concurrence avec Leibniz, du calcul infinitésimal. Il est aussi connu pour la généralisation du théorème du binôme et l'invention dite de la méthode de Newton permettant de trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
&&&&1&&&&\\
&&&1&&1&&&\\
&&1&&2&&1&&\\
&1&&3&&3&&1&\\
1&&4&&6&&4&&1
\end{array}
$$

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$\vdots$$
$$(x+y)^4 = 1\cdot x^4 + 4x^3\cdot y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

Prop. 3.12 $\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$

$$\binom{n}{r}$$

II. Probabilités

Vous avez vu l'année passée le début de la combinatoire, avec les permutations, les arrangements et les combinaisons. Nous terminons aujourd'hui le sujet de combinatoire avec quelques formules de comptage et commençons le calcul des probabilités, intimement lié à la théorie des ensembles...

1 Les coefficients multinomiaux

Pour terminer le chapitre consacré à la combinatoire, nous généralisons la notion de coefficient binomial.

Définition 1.1. Soit $n_1, \ldots, n_r$ des nombres entiers et $n = n_1 + \cdots + n_r$.
Le *coefficient multinomial* est

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_r!}. \quad = \overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots n_r)$$

Lorsque $r = 2$, on voit que $\binom{n}{n_1, n_2}$ est simplement le coefficient binomial

$C^n_{n_1} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2} = C^n_{n_2}$ puisque $n_1 + n_2 = n$

Ce dernier compte le nombre de combinaisons possibles de n_1 objets choisis dans un ensemble de n objets. Ou encore le nombre de manières différentes de répartir n objets en deux groupes, l'un de n_1 éléments et l'autre de n_2 éléments.

Mais que compte-t-on en général avec des coefficients multinomiaux ?

Théorème 1.2. *Le nombre de répartitions possibles de n objets distinguables en r groupes de $n_1, n_2, \ldots, n_r$ objets est égal au coefficient multinomial*

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_r!}.$$

BANANA 6 lettres, 3A, 2N, 1B

$\rightarrow \frac{6!}{3! \cdot 2!\, 1!}$ anagrammes

Démonstration. Procédons par récurrence. Lorsque $r = 2$, c'est la cas binomial connu. Supposons que $r > 2$ et que le cas $r - 1$ est vrai.
Pour répartir n objets en r groupes de $n_1, \dots, n_r$ éléments, choisissons d'abord n_r éléments pour former le $r^{\text{ème}}$ groupe. Il y a $\binom{n}{n_r}$ possibilités. Il reste $n - n_r$ éléments à répartir en $r-1$ groupes de $n_1, n_2 \dots n_{r-1}$ éléments. Par Hyp. de récurrence, il y a $\binom{n-n_r}{n_1, n_2, \dots n_{r-1}}$ possibilités.
Par le principe fondamental de la combinatoire, il y a en tout

$$\binom{n}{n_r} \cdot \binom{n-n_r}{n_1 \dots n_{r-1}} = \frac{n!}{\cancel{(n-n_r)!}\, n_r!} \cdot \frac{\cancel{(n-n_r)!}}{n_1!\, n_2! \dots n_{r-1}!} = \binom{n}{n_1, \dots n_r}$$ □

Exemple 1.3. Dans un camp, 14 élèves doivent choisir l'une des activités suivantes : canoé, escalade ~~et~~ ou spéléologie. Sachant qu'il y a trois canoés de 2 places, dont une est occupée par le moniteur, 4 baudriers disponibles, et 5 lampes de poches, combien de répartitions y a-t-il ?

Il y a $\binom{14}{5,4,5} = \frac{14!}{5!\ 4!\ 5!} = 252'252$ possibilités.

Pour terminer, voici le *Théorème multinomial*, qui généralise celui du binôme de Newton. La preuve est élémentaire.

Théorème 1.4. *On a* $\quad (x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{(n_1,\dots,n_r)} \binom{n}{n_1, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}.$

2 Répartitions des boules dans des urnes

Voici une application des principes combinatoires que vous avez vus l'année passée. Le problème est de répartir n boules identiques dans r urnes.

Exemple 2.1. On cherche à répartir 8 boules noires dans 3 urnes. On peut par exemple en placer 3 dans la première urne, puis une dans la deuxième, et 4 dans la dernière.
Pour compter le nombre de répartitions possibles, imaginons que nous alignions les huit boules comme ceci :

$$\bullet\ \bullet\ \bullet \mid \bullet \mid \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet$$

Il faut former trois groupes. Si on veut qu'il y ait au moins une boule par urne, il faut donc placer deux barres (séparateurs) dans deux espaces différents entre les boules.
Ici, 2 barres dans 7 espaces $\Longrightarrow \binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\,2!} = 21$ façons.

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Théorème 2.2. *Le nombre de répartition de n boules identiques en r urnes distinctes est*

$$\binom{n-1}{r-1}$$

si chaque urne doit contenir au moins une boule et que $r \leq n$.

Et si l'on autorise des urnes vides ? Dans la résolution précédente, on pourra donc placer plusieurs barres verticales au même endroit, y compris avant la première boule ou après la dernière.

Théorème 2.3. *Le nombre de répartition de n boules identiques dans r urnes distinctes est*

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \bar{P}_{n+r-1}(r-1,\, n)$$

si l'on peut laisser certaines urnes vides.

Démonstration. Cette fois, il s'agit simplement d'aligner n boules et $r-1$ séparateurs :
c'est une permutation de $r-1+n$ élément avec répétitions.

Il y a donc $\dfrac{(n+r-1)!}{(r-1)!\; n!} = C_{n}^{n+r-1} = C_{r-1}^{n+r-1}$ possibilités. □

Exemple 2.4. Monsieur et Madame Aubert ont fait quelques économies et pensent que le moment est venu d'investir 20000 francs en bourse. Ils peuvent placer un certain nombre de milliers de francs en actions suisses, en actions de la zone Euro, en action américaines, ou encore en obligations. Combien de stratégies se présentent ?

$$\binom{20+4-1}{4-1} = \binom{23}{3} = \frac{23\cdot 22\cdot 21}{3\cdot 2\cdot 1} = 23\cdot 11\cdot 7 = 1771.$$

3 Les événements

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont on connait à l'avance les issues possibles, bien que l'on ne sache pas laquelle sera finalement réalisée.

On appelle *ensemble fondamental* l'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire. On le note S.

Les éléments de S et tout sous-ensemble de S sont des *événements*.

Exemple 3.1. Si on lance une pièce de monnaie, l'ensemble fondamental $S = \{P, F\}$, où P est l'abréviation de pile et F celle de face.

Si l'expérience consiste à lancer deux dés, alors il y a $6 \cdot 6 = 36$ issues possibles et

$$S = \{(i; j) \,|\, 1 \leq i, j \leq 6\}.$$

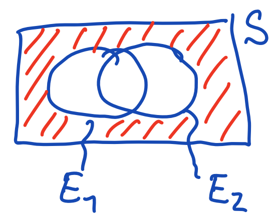
L'issue $(3; 6)$ ou encore l'issue $\{(i; i) \,|\, 1 \leq i \leq 6\}$ sont des événements ; le second est l'événement "les deux dés indiquent le même résultat".

Dans ces deux exemples, l'ensemble fondamental est fini, mais il se peut aussi qu'il soit infini.

Dans le cas où l'expérience consiste à mesurer la durée de vie en heures d'une ampoule économique, on a $S = \mathbb{R}_+ = [0, \infty[$. Ici $E = [0; 24]$ est l'événement "l'ampoule dure moins d'un jour".

On utilisera les notations usuelles de la théorie des ensembles pour effectuer des opérations sur des événements. Ainsi, si E et F sont deux événements, l'événement E^c est le *complémentaire* de E, c'est-à-dire l'événement où l'issue est n'importe quel résultat qui ne se trouve pas dans E. L'*intersection* $E \cap F$, aussi notée EF, est l'événement où l'issue est à la fois dans E et dans F. Les lois de De Morgan sont des principes élémentaires, mais fort utiles !

$n = 2$

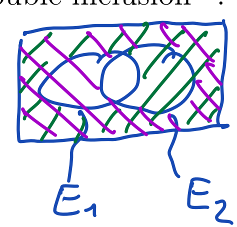


Proposition 3.2. Lois de De Morgan
Soient $E_1, \ldots, E_n$ des événements. Alors

$$\left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c = \cap_{i=1}^n E_i^c \quad \text{et} \quad \left(\cap_{i=1}^n E_i\right)^c = \cup_{i=1}^n E_i^c.$$

Démonstration. Pour démontrer la première loi, nous allons voir que l'on a la "double inclusion" :

$$\left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c \subset \cap_{i=1}^n E_i^c \quad \text{et} \quad \cap_{i=1}^n E_i^c \subset \left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c.$$



Pour la première inclusion, considérons un élément $x \in \left(\cup_{i=1}^n E_i\right)^c$.

$$x \in \left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)^c \Rightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^n E_i \Rightarrow$$

$$x \notin E_i, \forall i \Rightarrow x \in E_i^c, \forall i$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^n E_i^c$$

La deuxième inclusion se fait en exercice dans la série 2.
Pour démontrer la seconde loi de Morgan, définissons $F_i = E_i^c$.

Par la 1ère loi, $\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} F_i^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$ car $(E_i^c)^c = E_i$.

En prenant les complémentaires des deux expressions extrêmes :

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c .$$

□

Remarque 3.3. Un peu d'histoire. Auguste De Morgan (1806 - 1871) est un mathématicien et logicien britannique, né en Inde. Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne.

4 Les axiomes des probabilités

Comment définir la probabilité d'un événement ? L'idéal serait de pouvoir faire l'expérience un grand nombre de fois et de noter les résultats. Par exemple, si on lance une pièce de monnaie 20 fois de suite, il se pourrait que ce soit la suite

$$PPFPFFPFPFFFPFFPPFPF$$

qui soit lancée. On pourrait donc dire que 9 fois sur 20 on tombe sur pile. La probabilité de lancer pile doit donc être environ $9/20 = 0,45$. On dit aussi qu'on a environ 45% de chances de lancer pile. Mais il faudrait lancer la pièce encore bien plus de fois et la probabilité de lancer pile sera la limite lorsque n tend vers l'infini du nombre de lancers qui donnent pile divisé par le nombre de lancers au total... Mais ce nombre est-il bien défini ? Et de plus peut-on le calculer ?