Cours Euler: Corrigé 1

le 23 août 2023

Exercice 1

On écrit le nombre $n = 10\,000 \cdot a + 1000 \cdot b + 100 \cdot c + 10 \cdot d + e$. On doit montrer un « si et seulement si », il y a donc deux parties. Dans les deux parties, on utilise l'astuce de compliquer l'écriture de ce nombre :

$$n = (9999 \cdot a + a) + (999 \cdot b + b) + (99 \cdot c + c) + (9 \cdot d + d) + e.$$

Or, par associativité et commutativité de l'addition, on peut enlever les parenthèses et regrouper les termes de sorte que

$$n = 9999 \cdot a + 999 \cdot b + 99 \cdot c + 9 \cdot d + (a + b + c + d + e).$$

Comme $9999 = 9 \cdot 1111$, que $999 = 9 \cdot 111$ et que $99 = 9 \cdot 11$, on utilise ensuite la distributivité pour obtenir

$$n = 9 \cdot (1111 \cdot a + 111 \cdot b + 11 \cdot c + 1 \cdot d) + (a + b + c + d + e).$$

On appelle encore $m = 1111 \cdot a + 111 \cdot b + 11 \cdot c + 1 \cdot d$. Alors $\boxed{n = 9 \cdot m + (a + b + c + d + e)}$.

($\Longrightarrow$) : Supposons que n est divisible par 9. On doit montrer que la somme $a+b+c+d+e$ est aussi divisible par 9.
Comme n est divisible par 9, par définition, il existe un entier naturel k tel que $n = 9 \cdot k$. En soustrayant de part et d'autre $9 \cdot m$ dans la formule encadrée, on obtient alors

$$a + b + c + d + e = 9 \cdot k - 9 \cdot m = 9 \cdot (k - m).$$

On a bien montré que $a + b + c + d + e$ est un multiple de 9, autrement dit que cette somme est divisible par 9.

($\Longleftarrow$) : Supposons maintenant que $a + b + c + d + e$ est divisible par 9. On doit montrer que n est aussi divisible par 9.
Par hypothèse, $a+b+c+d+e$ est divisible par 9, ce qui veut dire par définition qu'il existe un $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $a + b + c + d + e = 9 \cdot \ell$. On remplace cette expression dans la formule encadrée ci-dessus et on obtient par distributivité

$$n = 9 \cdot m + 9 \cdot \ell = 9 \cdot (m + \ell).$$

On a prouvé que n est un multiple de 9, ce qui conclut la démonstration.

Exercice 2

On va montrer que $n \in \mathbb{N}$ est divisible par 5 si et seulement si son dernier chiffre est un 0 ou un 5. Le dernier chiffre d'un nombre est le reste de la division par 10 : $n = 10 \cdot k + r$ où $r < 10$. On sait que

$5 \mid n \iff$ il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $n = 5\cdot l$. Mais $10\cdot k+r = 5\cdot l \iff r = 5\cdot l-10\cdot k \iff r = 5\cdot(l-2k)$. Donc r qui est le dernier chiffre du nombre n doit être un multiple de 5 entre 0 et 9, soit 0 ou 5. Inversement, si le dernier chiffre du nombre est 0 ou 5, cela signifie que le reste $r < 10$ de $n = 10\cdot k+r$ est un multiple de 5. Donc $r = 5 \cdot l$ et donc $n = 10 \cdot k + r = 5 \cdot (2k + l)$ est divisible par 5.

Exercice 3

Un nombre à trois chiffres $n = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$ peut s'écrire, un peu comme dans l'exercice 1, comme

$$n = (99 \cdot a + a) + (11 \cdot b - b) + c = 99 \cdot a + 11 \cdot b + (a - b + c) = 11 \cdot (9 \cdot a + b) + (a - b + c).$$

Appelons $m = 9 \cdot a + b$ pour obtenir l'écriture plus compacte $\boxed{n = 11 \cdot m + (a - b + c)}$.

($\Longrightarrow$) : Supposons que n est divisible par 11. Alors il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 11 \cdot k$. On obtient, en soustrayant $11 \cdot m$ de part et d'autre de l'égalité ci-dessus, que

$$a - b + c = 11 \cdot k - 11 \cdot m = 11 \cdot (k - m).$$

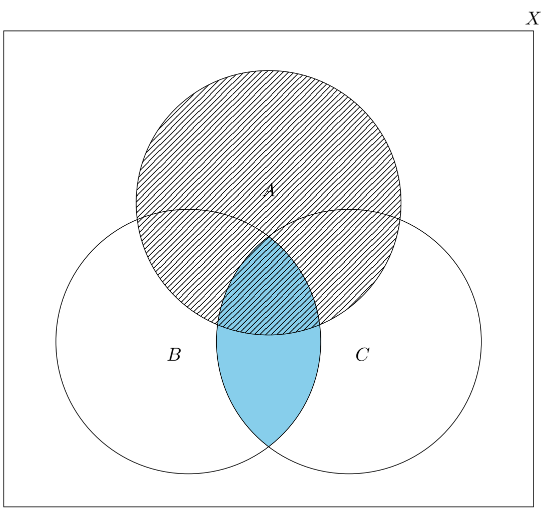
Ainsi $a - b + c$ est un multiple de 11. Or, a et c sont des chiffres compris entre 0 et 9, leur somme vaut donc au maximum 18. Le nombre $a - b + c$ est donc un multiple de 11 compris entre 0 et 18, il ne peut que s'agir de 0 ou 11.

($\Longleftarrow$) : Supposons maintenant que $a-b+c$ vaut 0 ou 11. La formule encadrée donne alors $n = 11\cdot m$ ou $n = 11 \cdot m + 11$. Dans les deux cas, n est un multiple de 11 car une somme de deux multiples de 11 est encore un multiple de 11 par distributivité.

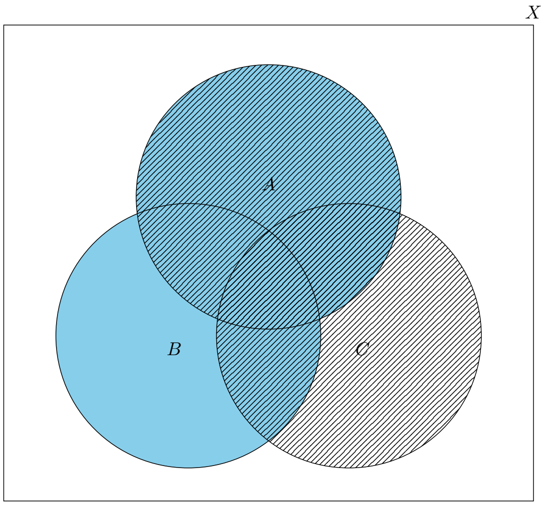
Exercice 4

On s'intéresse à l'expression $A \cup (B \cap C)$. Soient A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble X.

(a) $B \cap C$ est la partie coloriée et A est la partie hachurée. $A \cup (B \cap C)$ est le sous-ensemble constitué des parties coloriées et/ou hachurées.



(b) $A \cup B$ est la partie coloriée et $A \cup C$ est la partie hachurée. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ est le sous-ensemble à la fois colorié et hachuré.



S'il est difficile de différencier les parties colorées et hachurées dans la version imprimée, nous vous conseillons d'aller voir le corrigé en couleur disponible sur Moodle.

(c) Soit x un élément de $A \cup (B \cap C)$. On doit montrer que c'est aussi un élément de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Par définition de l'union, il y a deux cas. Soit $x \in A$, soit $x \in B \cap C$.

Premier cas : $x \in A$. Alors on a que $x \in A \cup B$ et aussi $x \in A \cup C$. Par définition de l'intersection, cela signifie que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Deuxième cas : $x \in B \cap C$. On sait ici que x est un élément de B et aussi un élément de C. Comme $x \in B$, on conclut que $x \in A \cup B$ et comme $x \in C$, on conclut que $x \in A \cup C$. On a prouvé que x est un élément de $A \cup B$ et de $A \cup C$, il est donc dans l'intersection $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dans les deux cas, on est arrivé à montrer que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(d) Soit y un élément de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. On doit montrer que y est aussi un élément de $A \cup (B \cap C)$. Pour tout $y \in X$, soit $y \in A$, soit $y \notin A$. On sépare les deux cas. Si $y \in A$, alors $y \in A \cup (B \cap C)$. Si $y \notin A$, comme $y \in A \cup B$, $y \in B$ et comme $y \in A \cup C$, $y \in C$ et donc $y \in B \cap C$. Donc $y \in A \cup (B \cap C)$.

Ce qui conclut la démonstration.

(e) En résumé, la partie (c) montre que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et la partie (d) montre l'autre inclusion $A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Par le principe de la double inclusion on conclut que $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.

(f) Cette égalité n'admet pas d'analogue dans $\mathbb{N}$ (en remplaçant $\cup$ par $+$ et $\cap$ par $\cdot$) car

$$(a+b)\cdot(a+c) = a^2 + a\cdot b + a\cdot c + b\cdot c$$

qui n'est pas égal à $a + b\cdot c$ en général. La formule est fausse en particulier pour $a = b = c = 1$ puisque $1 + 1 \neq 2 \cdot 2$. Dans $\mathbb{N}$, la multiplication se distribue sur l'addition mais pas le contraire.

Exercice 5

Soient $m, n, k \in \mathbb{N}$. On veut démontrer que $m \cdot (n : k) = (m \cdot n) : k$ quand cela a un sens.

(a) Ces expressions ont un sens si et seulement si k divise n. En effet, dans ce cas, le quotient $n : k$ existe et le membre de gauche de l'égalité existe. De plus si k divise n, alors k divise aussi $m \cdot n$, si bien que le membre de droite aussi existe.

(b) Lorsque k divise n, on démontre que $m \cdot (n : k) = (m \cdot n) : k$.
L'expression de droite $(m \cdot n) : k$ est définie par la propriété $m \cdot n = ((m \cdot n) : k) \cdot k$. On doit montrer que l'expression de gauche vérifie bien cette propriété. Or $(m \cdot (n : k)) \cdot k = m \cdot ((n : k) \cdot k)$ par associativité et $m \cdot ((n : k) \cdot k) = m \cdot n$ par définition de $n : k$.

Exercice 6

Soit X l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$.

(a) La liste de tous les sous-ensembles de X constitués de deux éléments est la suivante (on commence systématiquement pour ne rien oublier, par exemple avec tous les sous-ensembles qui contiennent A) :

$$\{A; B\}, \{A; C\}, \{A; D\}, \{A; E\}, \{B; C\}, \{B; D\}, \{B; E\}, \{C; D\}, \{C; E\}, \{D; E\}.$$

Il y a donc 10 tels sous-ensembles, ce qu'on aurait pu calculer en se disant qu'il faut choisir d'abord un élément parmi les cinq de X, il y a 5 choix possibles, puis encore un parmi les autre restants. Ceci fait $5 \cdot 4 = 20$ possibilités. Or, nous avons compté chaque sous-ensemble deux fois parce que $\{x, y\} = \{y, x\}$ pour tous $x, y \in X$. Cela fait donc bien 10 et notre liste est complète.

(b) Pour choisir trois éléments dans un ensemble X qui en contient 5, on peut tout aussi bien choisir les deux éléments qui *ne font pas* partie du sous-ensemble. Il y a donc exactement le même nombre de sous-ensembles de X constitués de trois éléments.

(c) Il y a 5 sous-ensembles constitués d'un élément et donc 5 aussi de quatre éléments, par le même argument que ci-dessus.

(d) Dans les parties précédentes, on a compté $10 + 10 + 5 + 5 = 30$ sous-ensembles de X. Les seuls sous-ensembles que nous n'avons pas encore considérés sont l'ensemble vide et X. Cela fait donc 32. L'ensemble des parties $\mathcal{P}(X)$ est précisément l'ensemble de tous les sous-ensembles de X ; il contient donc 32 éléments.
On aurait pu trouver cette réponse d'une manière directe. En fait on a la formule suivante : pour tout ensemble fini X,

$$\#\mathcal{P}(X) = 2^{\#X}$$

où $\#X$ est la *cardinalité* de X : le nombre d'éléments dans X.
Preuve : Soit X un ensemble fini et posons $n = \#X$. Une manière de créer un sous-ensemble $A \subset X$ consiste à décider pour chaque $x \in X$ s'il en fait partie ou non. Ainsi, pour chaque $x \in X$ il y a deux possibilités (il est pris ou pas pris). Ces deux possibilités se multiplient entre elles car on doit faire un choix indépendant pour chaque x. Comme il y a n éléments dans X, il y a 2^n manières de créer des sous-ensembles.

Exercice 7

Calcule dans chacun des cas le pgdc et le ppmc des nombres suivants en utilisant la méthode de factorisation :

(a) $135 = 3^3 \cdot 5$ et $324 = 2^2 \cdot 3^4$. Ainsi, le pgdc est $3^3 = 27$ et le ppmc est $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 = 1620$.

(b) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ et $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$. Ainsi, le pgdc vaut $2^2 = 4$ et le ppmc est $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

(c) $1\,000\,000 = 10^6 = 2^6 \cdot 5^6$ et $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Ainsi, le pgdc est $2^4 \cdot 5 = 80$ et le ppmc est $2^6 \cdot 3 \cdot 5^6 = 3\,000\,000$.

(d) $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$ et $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, donc le pgdc est $3^2 \cdot 5 = 45$ et le ppmc $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 1890$.

Exercice 8

Dans un restaurant, on a deux réservations de groupes pour la soirée : un groupe de 24 personnes et un autre groupe de 84 personnes. On souhaite les répartir à des tables où pourront s'asseoir le plus de personnes possible ensemble, d'un seul groupe. On veut qu'il y ait le même nombre de personnes à chaque table.
On observe d'abord qu'il s'agit d'un problème (simple) concernant le pgdc puisqu'il faut trouver le plus grand nombre possible dont 24 et 84 sont des multiples. Ainsi le nombre cherché est 12. En effet $2 \cdot 12 = 24$ et $7 \cdot 12 = 84$.

Exercice 9

Nous proposons deux démonstrations assez différentes. Nous vous laissons voir celle que vous comprenez le mieux.

Preuve 1 : Cette première preuve utilise le Théorème fondamental de l'arithmétique. Soient a et b deux nombres entiers naturels. Considérons leur décomposition en facteurs premiers. Nous allons montrer que les décompositions en facteurs premiers de $a \cdot b$ et $\text{pgdc}(a, b) \cdot \text{ppmc}(a, b)$ sont identiques et donc que ces deux produits sont égaux.
Pour commencer, notons que tous les nombres premiers apparaissant dans les décompositions des pgdc et ppmc sont présents dans la décomposition de a ou de b et donc de $a \cdot b$. On va montrer maintenant réciproquement que tous les facteurs de $a \cdot b$ sont dans $\text{pgdc}(a, b) \cdot \text{ppmc}(a, b)$ et avec la même puissance.
En effet, soit un nombre premier p apparaissant comme facteur dans a ou dans b (et donc dans leur produit). Supposons d'abord qu'il n'apparaisse que dans la décomposition de l'un des nombres a ou b (pas les deux), avec la puissance k. Alors le facteur p^k apparaît dans la décomposition du ppmc, mais pas dans celle du pgdc. Donc il apparaît exactement une fois dans le produit $\text{pgdc}(a, b) \cdot \text{ppmc}(a, b)$.
Supposons maintenant que le nombre premier p apparaisse dans la décomposition des deux nombres a et b sous la forme p^k et p^l respectivement (et donc sous la forme $p^k \cdot p^l = p^{k+l}$ dans leur produit). Le facteur de plus petite puissance apparaît dans le pgdc et le facteur de plus grande puissance dans le ppmc (si les puissances sont égales, p^k apparaît une fois dans le pgdc et une fois dans le ppmc). Ainsi, la décomposition de $\text{pgdc}(a, b) \cdot \text{ppmc}(a, b)$ admet le facteur $p^k \cdot p^l = p^{k+l}$.

Preuve 2 : Cette deuxième preuve n'utilise pas la factorisation en facteurs premiers. Soient a et b deux nombres entiers naturels. On appelle d le pgdc et m le ppmc. Démontrons que $a \cdot b = d \cdot m$.
Comme $d = \text{pgdc}(a, b)$, $d \mid a$ et $d \mid b$. Par conséquent, il existe a_1 et b_1 tels que $a = d \cdot a_1$ et $b = d \cdot b_1$. De plus, comme d est le plus grand diviseur commun de a et b, a_1 et b_1 sont premiers entre eux, de sorte que :

$$\text{pgdc}(a_1, b_1) = 1 \text{ et } \text{ppmc}(a_1, b_1) = a_1 \cdot b_1$$

De plus, $a = d \cdot a_1$ et $b = d \cdot b_1$ donc $\text{ppmc}(a, b) = d \cdot \text{ppmc}(a_1, b_1)$. Et ainsi :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{pgdc}(a,b)\cdot\operatorname{ppmc}(a,b) &= d\cdot\operatorname{ppmc}(a,b)\\
&= d\cdot d\cdot\operatorname{ppmc}(a_1,b_1)\\
&= d^2\cdot(a_1\cdot b_1)\\
&= d\cdot(d\cdot a_1)\cdot b_1 && \text{(associativité)}\\
&= (d\cdot a)\cdot b_1\\
&= b_1\cdot(d\cdot a) && \text{(commutativité)}\\
&= (b_1\cdot d)\cdot a && \text{(associativité)}\\
&= (d\cdot b_1)\cdot a && \text{(commutativité)}\\
&= b\cdot a\\
&= a\cdot b && \text{(commutativité)}
\end{aligned}
$$