I. Combinatoire

Nous commençons avec ce sujet le premier module de cette année consacré à la combinatoire, aux probabilités et aux statistiques. Pour le moment, nous voulons développer des méthodes et des formules de comptage d'événements. Combien y a-t-il de tirages possibles au lotto ? Combien y a-t-il de manières différentes de ranger les livres d'une bibliothèque ? Combien de possibilités différentes y a-t-il au tournoi de Roland-Garros d'arriver à la finale ? C'est à ces questions, et à bien d'autres encore, que nous voulons répondre !

1 Le principe fondamental de la combinatoire

Comment dénombrer les résultats possibles d'un certain nombre d'expériences indépendantes ?

Exemple 1.1. L'entraîneur de l'équipe mixte de patinage artistique doit choisir un homme parmi les 7 que compte l'équipe suisse et une femme parmi les 5 que compte son équipe. Combien de couples différents peut-il former ?

Pour chacun des 7 patineurs, il peut choisir chacune des 5 patineuses

$\Rightarrow 7 \cdot 5 = 35$ possibilités

Soit X un ensemble fini. On note $|X|$ le nombre d'éléments de X, aussi appelé sa *cardinalité*. Souvent on aime ordonner les éléments d'un ensemble de cardinalité k et on écrira parfois $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ pour donner un nom à chaque élément.

Exemple 1.2. Si X est l'ensemble des mois de l'année, $|X| = 12$. On peut écrire $X =${janvier, février, mars, avril, mai, juin, juillet, août, septembre, octobre, novembre, décembre}, ou encore si l'on ne s'intéresse qu'au comptage $X = \{m_1, m_2, \ldots, m_{12}\}$, où m_j est le j-ème mois de l'année.

Lorsque X et Y sont deux sous-ensembles d'un même ensemble Z, on peut former leur union $X \cup Y$ et leur intersection $X \cap Y$ par

$X \cup Y = \{z \in Z \mid z \in X \text{ ou } z \in Y\}$ et $X \cap Y = \{z \in Z \mid z \in X \text{ et } z \in Y\}$

Lemme 1.3. *On a* $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

Démonstration.
Appelons $z_1, \dots, z_k$ les éléments de $X \cap Y$.
Alors X est formé de ces éléments et de quelques autres: $X = \{z_1, \dots, z_k, x_1, \dots, x_m\}$
De même: $Y = \{z_1, \dots, z_k, y_1, \dots, y_n\}$ et donc $X \cup Y = \{z_1, \dots, z_k, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$
$\Rightarrow |X| = k+m$, $|Y| = k+n$, $|X \cup Y| = k+m+n$ et $|X \cap Y| = k$
□

Lorsque l'intersection de X et Y est vide, on dit que l'union $X \cup Y$ est *disjointe* et on note $X \cup Y = X \coprod Y$. Ainsi la cardinalité d'une union disjointe est la somme des cardinalités : $|X \coprod Y| = |X| + |Y|$.

Théorème 1.4. *Soient X et Y des ensembles finis. Alors* $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

Démonstration. L'ensemble produit $X \times Y$ est l'ensemble de tous les couples (x, y) avec $x \in X$ et $y \in Y$. Ainsi, si on fait varier y, on peut décomposer le produit en une union disjointe

$$X \times Y = \coprod_{y \in Y} X \times \{y\}.$$

Chaque ensemble $X \times \{y\}$ est de cardinalité $|X|$ puisqu'il existe une bijection entre $X \times \{y\}$ et X pour tout y. Le résultat précédent montre que $|X \times Y| = \sum_{y \in Y} |X \times \{y\}| = |X| \cdot |Y|$. □

C'est ce résultat assez anodin qui mérite le nom de principe fondamental de la combinatoire ! En voici la formulation combinatoire.

Théorème 1.5. *Soit k un nombre entier ≥ 2. Supposons que l'on réalise k expériences indépendantes l'une de l'autre. Si la j-ème a n_j résultats possibles pour $1 \leq j \leq k$, alors il existe $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ résultats différents pour les k expériences prises ensemble.*

Démonstration. On effectue la preuve par récurrence sur k. Les cas $k = 1$ et $k = 2$ sont connus. Supposons donc que $k \geq 3$ et que le cas de $k - 1$ expériences est vrai.
On décompose l'expérience en 2: la première d'un côté et les $k-1$ suivantes de l'autre
Hypothèse de récurrence $\Rightarrow$ $k-1$ expériences admettent $n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ résultats
Cas $k=2$ $\Rightarrow$ $n_1 \cdot (n_2 \cdot \ldots \cdot n_k)$ résultats différents
□

Exemple 1.6. On lance en même temps un dé traditionnel à six faces numérotées de 1 à 6 et un dé octogonal dont les faces sont gravées d'une lettre majuscule A, B, C, D, E, F, G, H. Combien y a-t-il de lancers différents ?

On peut écrire dans un tableau à double entrée les résultats possibles de tous les lancers :

$1A$	$2A$	$3A$	$4A$	$5A$	$6A$
$1B$	$2B$	$3B$	$4B$	$5B$	$6B$
$1C$	$2C$	$3C$	$4C$	$5C$	$6C$
$1D$	$2D$	$3D$	$4D$	$5D$	$6D$
$1E$	$2E$	$3E$	$4E$	$5E$	$6E$
$1F$	$2F$	$3F$	$4F$	$5F$	$6F$
$1G$	$2G$	$3G$	$4G$	$5G$	$6G$
$1H$	$2H$	$3H$	$4H$	$5H$	$6H$

Il y a donc $6 \cdot 8 = 48$ lancers différents

Exemple 1.7. Combien y a-t-il de nombres à deux chiffres ?

Un nombre à 2 chiffres s'écrit $xy = 10x + y$ avec $1 \leq x \leq 9$ et $0 \leq y \leq 9$

$\Rightarrow 9 \cdot 10 = 90$ nombres à 2 chiffres

Exemple 1.8. Combien y a-t-il de nombres à trois chiffres tous distincts qui se terminent par un 3 ou par un 7 ?

centaine dizaine unité

$\boxed{\neq 0}$ $\boxed{}$ $\boxed{3/7}$

$8 \cdot 8 \cdot 2 = 128$ nombres possibles

Les notions de permutation, arrangement et combinaison permettent de dénombrer une grande classe de situations différentes. Nous en établissons maintenant les méthodes générales.

2 Permutations

Avant de définir ce qu'est une permutation, commençons avec un exemple. Supposons que nous voulons écrire des mots différents avec les trois lettres A, D et N. Combien y en a-t-il ?

ADN, DAN, DNA, AND, NDA, NAD $\Rightarrow$ 6 possibilités

$\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ possibilités

Définition 2.1. Soit X un ensemble fini de cardinalité n. Une *permutation* de X est une disposition ordonnée $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de tous les éléments de X.

Théorème 2.2. *Soit X un ensemble fini de cardinalité n. Alors le nombre de permutations de X est $P_n = n!$.*

Démonstration. On démontre le résultat par induction sur n. Si $n = 1$, il y a un seul élément x dans X. Ainsi la seule permutation est (x). Si $n > 1$, notre hypothèse d'induction est qu'il y a $(n-1)!$ permutations d'un ensemble de cardinalité $n-1$. Une permutation de X est déterminée par le choix du premier élément, appelons-le x, puis d'une permutation de $X - \{x\}$. Le principe fondamental de la combinatoire nous apprend alors qu'il y a $n \cdot (n-1)! = n!$ résultats possibles. □

Exemple 2.3. On joue au lotto en tirant dans un sac des jetons numérotés de 1 à 45. Combien de tirages différents y a-t-il ?

Il y en a $45! \cong 10^{56}$

Parfois, on effectue des expériences où des répétitions sont autorisées. Imaginons l'expérience suivante. On place dans un sac opaque 3 boules noires complétement identiques et 2 boules blanches pareilles. On sort du sac une boule après l'autre. Combien y a-t-il de tirages, tenant compte du fait que les boules noires (respectivement les boules blanches) sont indistinguables ? Si l'on pouvait les distinguer, on aurait bien sûr 5! tirages différentes. Mais pensons par exemple au tirage "noir - blanc - noir- noir- blanc", que l'on notera $NBNNB$. Si l'on numérote les boules noires N_1, N_2, N_3, on voit que tous les tirages

$$N_1BN_2N_3B,\ N_1BN_3N_2B,\ N_2BN_1N_3B,\ N_2BN_3N_1B,\ N_3BN_1N_2B,\ N_3BN_2N_1B$$

sont indistinguables. Il y en a $3! = 6$ correspondant aux permutations des boules noires. De même, il y a dans chaque cas de figure 2 tirages indistinguables dû au fait que l'on tire deux boules blanches. Par conséquent, il y a

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ tirages differents}$$

Il s'agit de

$$NNNBB,\ NNBNB,\ NNBBN,\ NBNNB,\ NBNBN,$$
$$NBBNN,\ BNNNB,\ BNNBN,\ BNBNN,\ BBNNN.$$

Définition 2.4. Soit X un ensemble de k éléments $x_1, \ldots, x_k$. Une *permutation de n objets avec $r_1, r_2, \ldots, r_k$ répétitions* de X est un n-uplet d'éléments de X où x_i apparaît exactement r_i fois.

En particulier, on a $r_1 + \cdots + r_k = n$. On peut aussi penser à ces permutations avec répétitions de la manière suivante. Soit X un ensemble de n éléments dans lequel il y a des sous-ensembles de $r_1, \ldots, r_k$ objets identiques. Une permutation avec répétitions de X est une permutation de X où l'ordre des objets indistingables n'est pas pris en compte.

Théorème 2.5. *Le nombre de permutations de n avec $r_1, r_2, \ldots r_k$ répétitions est* $\overline{P}_n(r_1; \ldots; r_k) = \dfrac{n!}{r_1! \ldots r_k!}$.

Démonstration. Ce résultat reviendra dans un prochain cours, où nous le démontrerons. □

Exemple 2.6. On veut classer 6 livres de Jules Verne dans un rayon de librairie : 2 exemplaires de "20000 lieues sous les mers", 3 exemplaires de "5 semaines en ballon" et 1 seul du "Tour du monde en 80 jours". De combien de manières peut-on le faire ?

On a $\dfrac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$ possibilités

3 Arrangements et combinaisons

Définition 3.1. Soit X un ensemble de n éléments distincts. Un *arrangement* de r éléments de X est une disposition ordonnée de r éléments de X. On note A_r^n le nombre de ces arrangements.

Exemple 3.2. Trente-deux équipes participent à la coupe du monde de football. Combien de podiums possibles y a-t-il ?

1^{er} 2^e 3^e

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$

$32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$ podiums possibles

Le même raisonnement permet de calculer le nombre d'arrangements.

Proposition 3.3. $A_r^n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Exemple 3.4. Mélissa (3 ans) possède 3 animaux en peluche : un ours, un kangourou et une souris. Elle aime les placer sur un canapé à 5 places. De combien de manières différentes peut-elle le faire ?

On doit choisir 3 places parmi les 5 du canapé $\Rightarrow A_3^5 = 60$ choix possibles

Définition 3.5. Soit X un ensemble de n éléments distincts et $r \leq n$. Un *arrangement avec répétitions* de r éléments de X est une disposition ordonnée de r éléments non nécessairement distincts de X. On note $\overline{A_r^n}$ le nombre de ces arrangements avec répétitions.

Proposition 3.6. $\overline{A_r^n} = n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^r$.

Exemple 3.7. Combien de mots de trois lettres (de a à z) peut-on former ?

$$\underset{26}{\square}\cdot\underset{26}{\square}\cdot\underset{26}{\square} = 26^3 = 17576$$

Définition 3.8. Soit X un ensemble de n éléments distincts. Une *combinaison* de r éléments de X est une disposition non ordonnée de r éléments de X. On note C_r^n le nombre de ces combinaisons.

Exemple 3.9. Au SwissLotto, on tire 5 nombres entre 1 et 45. Combien de tirages différents y a-t-il ? Il y a A_5^{45} arrangements, mais puisqu'on ne tient pas compte de l'ordre des éléments (le tirage $5, 32, 40, 10, 3$ est le même que $40, 3, 32, 5, 10$), il faut encore diviser par $5!$. Il y a donc $\dfrac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1221759$ tirages de lotto différents. Chaque joueur doit donc être bien conscient qu'il a moins d'une chance sur un million de gagner ! Cela fait moins de $0,0001\%$...

Théorème 3.10. $C_r^n = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$.

Exemple 3.11. Dans une classe de 10 élèves, combien a-t-on de choix de 3 personnes pour organiser une fête ?

On doit choisir 3 élèves parmi les 10 (ordre du choix pas important)

$\Rightarrow C_3^{10} = 120$ choix possibles

Le nombre de combinaisons C_r^n est aussi appelé *coefficient binomial* pour des raisons que nous allons voir tout de suite. La proposition suivante donne une relation entre les combinaisons de n éléments et celles de $n-1$ éléments.

Proposition 3.12. *On a* $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$ *pour* $1 \leq r \leq n-1$.

Démonstration. Voici un argument combinatoire pour démontrer cette égalité. Soit X un ensemble de n objets et x l'un d'entre eux. Les combinaisons de r objets peuvent être classées en deux groupes, celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas. Il y a $\begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix}$ combinaisons qui contiennent x car il faut simplement former une combinaison de $r-1$ éléments de $X - \{x\}$ et $\begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix}$ combinaisons qui ne contiennent pas x car il s'agit des combinaisons de r éléments de $X - \{x\}$. □

Exemple 3.13. Un relais radiophonique est mis en place à l'aide de n antennes, dont m sont défectueuses. Le relais ne fonctionne que si deux antennes défectueuses ne sont jamais côte à côte. Combien peut-on trouver de configurations qui fonctionnent ?

Imaginons les $n-m$ antennes qui fonctionnent, alignées comme ceci :

$$-F-F-F\cdots-F-F-$$

où F indique une antenne qui fonctionne et $-$ une place pour une éventuelle antenne défectueuse. Il y a donc $n-m+1$ positions où on peut installer une telle antenne. On doit en choisir m si bien que la réponse est $\begin{pmatrix} n-m+1 \\ m \end{pmatrix}$.

Le nombre de combinaisons C_k^n est aussi appelé *coefficient binomial* pour des raisons que nous allons voir maintenant. La notion de combinaison permet en effet d'établir une formule particulièrement utile :

Théorème 3.14 (Binôme de Newton)**.** *On a* $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k y^{n-k}$.

Démonstration. Considérons le produit

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\dots(x_n+y_n).$$

Lorsque l'on développe cette expression, on obtient 2^n termes, chaque terme étant un produit de n facteurs (des x_i et des y_j). De plus, chacun de ces termes contient soit x_i, soit y_i pour tout $1 \leq i \leq n$. Il nous faut maintenant compter le nombre de termes qui contiennent exactement k facteurs x_i et $(n-k)$ facteurs y_j. Ces facteurs correspondent au choix de "k parmi n" (des combinaisons de k éléments dans un ensemble de n objets), c'est-à-dire $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. On obtient donc la formule en posant $x_i = x$ et $y_i = y$ pour tout i. □

Remarque 3.15. Un peu d'histoire. Isaac Newton (1643-1727) est un philosophe, mathématicien, physicien et astronome anglais.

Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour sa théorie de la gravitation universelle et la création, en concurrence avec Leibniz, du calcul infinitésimal. Il est aussi connu pour la généralisation du théorème du binôme et l'invention dite de la méthode de Newton permettant de trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.