

Série 3

Pour le 6 septembre 2023

Exercice 1

Un professeur donne à sa classe 10 problèmes. L'examen consistera à résoudre 5 de ces problèmes et pour réussir il faudra résoudre correctement au moins 4 problèmes. Si un étudiant sait résoudre 7 de ces problèmes, quelle est la probabilité qu'il réussisse ?

Exercice 2

On joue au jeu suivant. Il y a deux boîtes contenant chacune cinq boules, numérotées de 1 à 5, et de 6 à 10. On choisit d'abord une boîte, qu'on ouvre, puis une boule dans cette boîte. On gagne si le nombre indiqué sur la boule choisie est un multiple de 3. Quelle est la probabilité de gagner ?

Calcule ensuite les probabilités conditionnelles de gagner sachant que la première boîte a été choisie, puis celle sachant que c'est la deuxième qui a été choisie. Dessine un arbre pour expliquer ces choix et indique sur chaque branche la probabilité du choix auquel elle correspond.

Exercice 3

Dans un gymnase, 4% des garçons et 1% des filles mesurent plus de 1,8 m. Or, 60% des élèves sont des filles. On choisit un élève au hasard et on constate qu'il mesure plus de 1,8 m. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Exercice 4

A l'aide d'un calcul de probabilité conditionnelle, calcule la probabilité qu'il y ait 2 garçons dans une famille de trois enfants sachant qu'il y a au moins une fille.

Exercice 5

On mélange dans un chapeau trois cartes. La première a un côté noir et l'autre blanc, la deuxième a ses deux faces noires, la dernière a ses deux faces blanches. On tire une carte au hasard et on ne voit qu'une face, elle est blanche. Quelle est alors la probabilité que l'autre est noire ?

Attention, on croit souvent que c'est $1/2$, mais tu verras que ce n'est pas le cas, il vaut mieux parier qu'elle est blanche !

Exercice 6

Lors d'une donne au chibre (36 cartes), quelle est la probabilité que tu aies 5 piques et ton partenaire les 4 autres ?

Exercice 7

On tire au hasard une boule d'une première urne qui contient deux boules blanches et une noire et on la place dans une deuxième urne qui contient une boule blanche et cinq noires. On tire alors une boule de cette deuxième urne. Elle est blanche ! Quelle est la probabilité que la boule tirée dans la première urne ait aussi été blanche ?

Exercice 8

On fait expérimentalement les constatations suivantes :

- le temps qu'il fait dépend du temps qu'il a fait la veille,
- s'il fait beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est 0.8,
- s'il fait mauvais un jour, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est 0.6.

Lors d'une belle journée ensoleillée de printemps, on vous demande de calculer la probabilité :

- a) qu'il fasse beau les trois jours suivants,
- b) qu'il fasse beau dans trois jours.

Exercice 9

Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée est de 90% et celle que toutes les deux soient occupées 50%. Quelle est la probabilité :

- a) que la première salle soit libre ?
- b) que les deux salles soient libres ?
- c) que l'une des deux salles au moins soit libre ?
- d) qu'une seule salle soit libre ?
- e) que la seconde salle soit libre, si l'on sait que la première est occupée ?

Remarque : Vous pouvez vous aider d'un diagramme de Venn pour cet exercice...

Exercice 10

Un laboratoire d'analyse assure avec une fiabilité de 95% la détection d'une certaine maladie lorsqu'elle est présente. Par contre, si le patient est sain, il arrive dans un cas sur cent que le test soit faussement positif. Sachant que 0,5% de la population souffre effectivement de cette maladie, quelle est la probabilité d'être réellement malade si le test est positif ?

Exercice 11

Problème de baccalauréat, 13 pts/88 = 35 minutes.

Deux sacs semblables contiennent des boules de couleur. Le premier sac contient 4 boules rouges et 4 boules noires, le second en contient trois rouges et sept blanches.

1. On choisit un sac au hasard et on tire deux boules l'une après l'autre sans les remettre dans le sac. Calcule la probabilité des événements suivants :
 - (a) une boule exactement est noire ;
 - (b) les deux boules ont des couleurs différentes ;
 - (c) les deux boules ont la même couleur ;
 - (d) au moins l'une des deux boules est rouge ;
 - (e) le sac choisi est le deuxième, sachant que les deux boules ont des couleurs différentes.
2. On n'utilise maintenant que le deuxième sac. On en tire une boule, on note la couleur et on la remet dans le sac. Combien de fois faut-il itérer l'expérience pour que la probabilité de tirer au moins une fois une boule rouge dépasse les 95% ?

Exercice 12

On tire deux cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité qu'elles forment un "black jack" (un as et une figure ou un dix). Calcule cela de deux manières, directement en comptant le nombre de paires de cartes et avec la formule de multiplication en considérant l'expérience comme étant constituée de deux tirages successifs.

Exercice théorique**Exercice 13**

La probabilité conditionnelle est une fonction de probabilité.

Soit F un événement fixé. Montre que la fonction $E \mapsto P(E|F)$ est une fonction de probabilité.

Ainsi :

- a) $0 \leq P(E|F) \leq 1$ pour tout événement E ;
- b) $P(S|F) = 1$;
- c) $P(\coprod E_i|F) = \sum P(E_i|F)$ pour des événements E_i qui s'excluent mutuellement.