

Série 2

Pour le 30 août 2023

Exercice 1

De combien de façons peut-on aligner 5 dés (à six faces) de couleurs différentes ?

Exercice 2

Un représentant doit rendre visite à cinq clients. De combien de manières peut-il le faire s'il effectue toutes ses visites le même jour ? Et s'il fait trois visites le premier jour et deux le second jour ?

Exercice 3

Un groupe de 5 hommes et 7 femmes aimerait former un comité pour l'égalité des chances composé de deux hommes et trois femmes. Combien de comités différents peut-on former ? Et si deux femmes ne s'entendent pas bien et préfèrent ne pas siéger ensemble ?

Exercice 4

On considère un groupe de 10 randonneurs, dont Pierre, Paul et Jacques. Les 10 randonneurs marchent les uns derrière les autres (ils forment une colonne de marcheurs).

- Combien y a-t-il de colonnes possibles ?
- Dans combien de colonnes Pierre, Paul et Jacques se suivent-ils (dans un ordre quelconque) ?
- Quel est le nombre de colonnes pour lesquelles Pierre, Paul et Jacques ne sont ni en tête, ni en queue du groupe ?

Exercice 5

Un robot parcourt une terrasse rectangulaire de 4 mètres sur 7 en suivant le bord des dalles carrées de un mètre de côté. Il commence sur un coin de la terrasse et aimerait rejoindre le coin situé à l'opposé de la diagonale. Combien de chemins de longueur minimale peut-il emprunter ?

Exercice 6

- a) Dans une société de 25 personnes, on doit en désigner 4 qui formeront le comité. Combien de comités différents peut-on constituer ?
- b) Dans une société de 25 personnes, on doit désigner un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire. De combien de manières différentes peut-on choisir ces 4 personnes ?

Exercice 7

- a) Un étudiant doit résoudre 8 problèmes sur 10 lors d'une épreuve écrite. Combien de choix peut-il faire ?
- b) Même question en supposant de plus qu'il doit obligatoirement résoudre :
- i) les 3 premiers problèmes ;
 - ii) 4 au moins des 5 premiers problèmes.

Exercice 8

Un tiroir contient 4 couteaux, 7 fourchettes et 1 cuillère, mais ces ustensiles sont rangés dans le plus grand désordre.

- a) On choisit successivement trois de ces services sans remettre le service choisi dans le tiroir. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels on a tiré :
- i) dans cet ordre la cuillère, une fourchette et un couteau ?
 - ii) un couteau lors troisième tirage ?
 - iii) la cuillère ?
 - iv) au moins deux fourchettes ?
- b) On saisit dans le tiroir, simultanément, trois des ustensiles. Déterminer le nombre de tirages pour lesquels on a tiré :
- i) la cuillère, une fourchette et un couteau ;
 - ii) trois fourchettes ou trois couteaux ;
 - iii) la cuillère ?

Exercice 9

De combien de façons peut-on choisir 5 cartes à jouer dans un jeu de 36 cartes, de manière que ces 5 cartes comprennent :

- a) les 4 as ?
- b) 2 as et 2 rois ?
- c) au moins un as ?

Exercice 10

On dispose de 10 timbres tous différents. Trois d'entre eux sont rouges, cinq sont bleus et deux sont verts. On en choisit quatre. De combien de façons différentes peut-on faire ce choix, sachant que :

- a) les timbres choisis sont tous de la même couleur ?
- b) les trois couleurs figurent parmi les timbres choisis ?

Exercice 11

Chaque jour de la semaine (7 jours), un amoureux offre une fleur à sa belle. Il achète cette fleur dans un magasin qui ne vend que des iris, des oeillets et des roses. Il fait en sorte que chaque semaine soit différente de toutes les précédentes.

- a) Pendant combien de semaines ce Romeo peut-il acheter des fleurs dans ce magasin ?
- b) Combien y aura-t-il de semaines au cours desquelles la jeune fille recevra :
 - i) au moins une rose ?
 - ii) exactement 3 roses ?
 - iii) 3 roses, 2 iris et 2 oeillets ?

Exercice 12

Calcule tous les coefficients multinomiaux de la forme $\binom{2}{n_1, n_2, n_3}$, puis utilise-les pour développer $(x + y + z)^2$.

Exercice 13

Les parents des triplés Kay, May et Ray ont acheté 7 cadeaux. Les emballages sont identiques. Combien de manières y a-t-il de les distribuer ? Et si Kay en reçoit 3 ?

Exercice 14

Quatre nouvelles écoles ont été construites et on dispose de 8 tableaux noirs de tailles différentes. De combien de manières peut-on les répartir ?

Exercice 15

On tire 3 cartes d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir

- 3 as ?
- 2 rois et une dame ?
- au moins un valet

Exercice 16

Dans un jeu de bridge (52 cartes), les joueurs Nord et Sud reçoivent 8 carreaux. Quelle est alors la probabilité que Est ait exactement 3 des 5 cartes de carreau restantes ?

Indication. Tu peux raisonner sur l'ensemble fondamental "réduit" des 26 cartes qui restent à distribuer entre Est et Ouest une fois que Nord et Sud disposent des leurs. Combien de donnes possibles y a-t-il ?

Exercices théoriques**Exercice 17**

Lois de Morgan. Soient E_1, \dots, E_n des ensembles. Montre que $\bigcap_{i=1}^n E_i^c \subset (\bigcup_{i=1}^n E_i)^c$.

Exercice 18

Un peu de combinatoire pour réviser. On considère un groupe de n personnes qui doivent choisir un comité assorti d'un président. Le nombre de personnes dans le comité n'est pas fixé et pourrait éventuellement être égal à zéro (+ le président).

a) Montre que le nombre de ces comités est égal à $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

b) Montre par récurrence que ce nombre vaut $n 2^{n-1}$.

Indication : Tu peux utiliser, après les avoir démontrées, les formules suivantes.

$$(a) \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

$$(b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

c) Utilise un argument de comptage pour arriver à la formule précédente.