

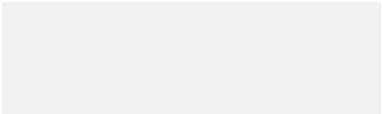


Ens. : Peter Wittwer
Analyse avancée II - (n/a)
2 juillet 2021
Durée : 3 heures

n/a













n/a

SCIPER: 999999

Signature: 

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définies par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{xyz} \\ \sin(y-x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(u, v) = \begin{pmatrix} u^3 + v^2 \\ 2v \end{pmatrix}$$

Alors on a la matrice jacobienne suivante :

$J_{g \circ f}(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$J_{g \circ f}(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$J_{g \circ f}(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J_{g \circ f}(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Question 2 : Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$h(u, v) = (u - 1 + v^2, 2uv, u - 1 + 3v)^T,$$

$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z)$, une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, et soit $f = g \circ h$. Alors, indépendamment du choix de g , on a :

$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0, 0) + \frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0, 0) + 3 \frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0, 0) + 2 \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0, 0) + 3 \frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, 0)$

$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 0) = 2 \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0, 0) + 3 \frac{\partial g}{\partial z}(0, 0, 0)$

Question 3 : L'intégrale

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} \cos \left(\frac{3}{4} y^{4/3} - \frac{2}{3} y^{3/2} \right) dy \right) dx$$

vaut :

$\frac{1}{12} \sin \left(\frac{1}{12} \right)$

$\sin \left(\frac{1}{12} \right)$

$\frac{1}{12} \cos \left(\frac{3}{4} y^{4/3} - \frac{2}{3} y^{3/2} \right)$ 0

Question 4 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) + y'(x)^2 = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ vérifie aussi :

$y'(1) = e$

$y'(1) = \frac{1}{2}$

$y'(1) = -\frac{1}{2}$

$y'(1) = 1$



Question 5 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin(x^2 - 2xy + y^2 + x - y)$. Alors son polynôme de Taylor d'ordre trois autour du point $(0, 0)$ est donné par

- $p_3(x, y) = x - y + x^2 - 2xy + y^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}y^3$
- $p_3(x, y) = x - y - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}y^3$
- $p_3(x, y) = x - y + x^2 - 2xy + y^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}y^3$
- $p_3(x, y) = x - y + x^2 - 2xy + y^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}y^3$

Question 6 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors :

- les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$
- f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
- f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$
- f est différentiable en $(0, 0)$, et la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0, 0)$

Question 7 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

et soit le vecteur $\mathbf{v} = (1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$. Alors on a pour la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$:

- $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = 1$ $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = \frac{1}{2}$ $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = 0$

Question 8 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 + x_2x_3 - x_3x_4$, et soit $a = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Alors l'équation de l'hyper-plan tangent au point $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$ du graphe de f ,

$$\Gamma(f) = \{((x_1, x_2, x_3, x_4), x_5) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} : x_5 = f(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$$

est :

- $2 - 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0$ $2 - 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0$
- $2 - 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0$ $2 - 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$

Question 9 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x^2y^2 + x^2z + z + y^4z^5 - 22$, soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage du point $(x, z) = (1, 1)$ et soit la fonction $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(1, 1) = 2$ et $\forall (x, z) \in U, f(x, g(x, z), z) = 0$. Alors :

- $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = \frac{18}{41}$ $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -\frac{41}{18}$
- $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = \frac{41}{18}$ $\frac{\partial g}{\partial z}(1, 1) = -\frac{18}{41}$



Question 10 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u'' + 4u = 8 \sin(2t)$$

qui satisfait la condition initiale $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$ vérifie aussi :

$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$

Question 11 : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine dans le premier quadrant délimité par les droites $y = x$, $y = 3x$, $y = 1 - x$ et $y = 3 - x$, c'est-à-dire soit

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x \leq y \leq 3x, 1 - x \leq y \leq 3 - x\}$$

Alors, l'intégrale

$$\int_D \frac{x+y}{x^2} dx dy$$

vaut :

1 4 6 9

Question 12 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y^2$. Alors le minimum global m et le maximum global M de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = y^2 - (2 - x)(x + 1) = 0$ sont :

$m = 3$ et $M = 3$ $m = 2$ et $M = 3$ $m = -1$ et $M = 2$ $m = -1$ et $M = 3$

Question 13 : Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D 1 dx dy dz$$

vaut :

π 1 -1 $\frac{1}{2}\pi$

Question 14 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = -4y^3 + 4x^3 + 3y - 3x$. Alors, f possède sur \mathbb{R}^2 :

1 point selle aucun point selle 2 points selles 4 points selles



Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 15 : Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = |y|^{\frac{2}{3}}$. Alors, pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, admet, dans tout voisinage de x_0 suffisamment petit, exactement une solution $y(x)$.

VRAI FAUX

Question 16 : Une union quelconque de sous-ensembles ouverts de \mathbb{R}^n est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

VRAI FAUX

Question 17 : Soit $\Omega = \{\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: |x_1| + |x_2| < \pi\}$ et soit $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 0}$, $\mathbf{x}_k \in \Omega$, une suite. Alors il existe une sous-suite $(\mathbf{x}_{k_j})_{j \geq 0}$ qui converge vers un élément de Ω .

VRAI FAUX

Question 18 : Soit $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un point tel que $F(x_0, y_0) = 0$, et $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 et une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $y_0 = f(x_0)$ et, $\forall x \in U$, $F(x, f(x)) = 0$.

VRAI FAUX

Question 19 : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R}^n , telle que $f(0) = 0$. Alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

VRAI FAUX

Question 20 : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est différentiable en tout point de \mathbb{R}^n . Alors la restriction de f à un ensemble non vide fermé et borné de \mathbb{R}^n est une fonction bornée.

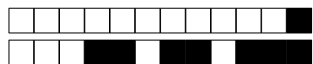
VRAI FAUX

Question 21 : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R}^n . Si en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ le gradient de f existe, alors f est différentiable en x_0 .

VRAI FAUX

Question 22 : L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ est connexe par arcs.

VRAI FAUX



Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Vos réponses doivent être soigneusement justifiées et toutes les étapes de votre raisonnement doivent y figurer. Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé**.

Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Tourner les pages ! Cette section contient 3 questions à 10 points chacune !

Question 23: *Cette question est notée sur 10 points.*

<input type="checkbox"/> ₀ <input type="checkbox"/> ₁ <input type="checkbox"/> ₂ <input type="checkbox"/> ₃ <input type="checkbox"/> ₄ <input type="checkbox"/> ₅ <input type="checkbox"/> ₆ <input type="checkbox"/> ₇ <input type="checkbox"/> ₈ <input type="checkbox"/> ₉ <input type="checkbox"/> ₁₀	<i>Réservé au correcteur</i>
--	------------------------------

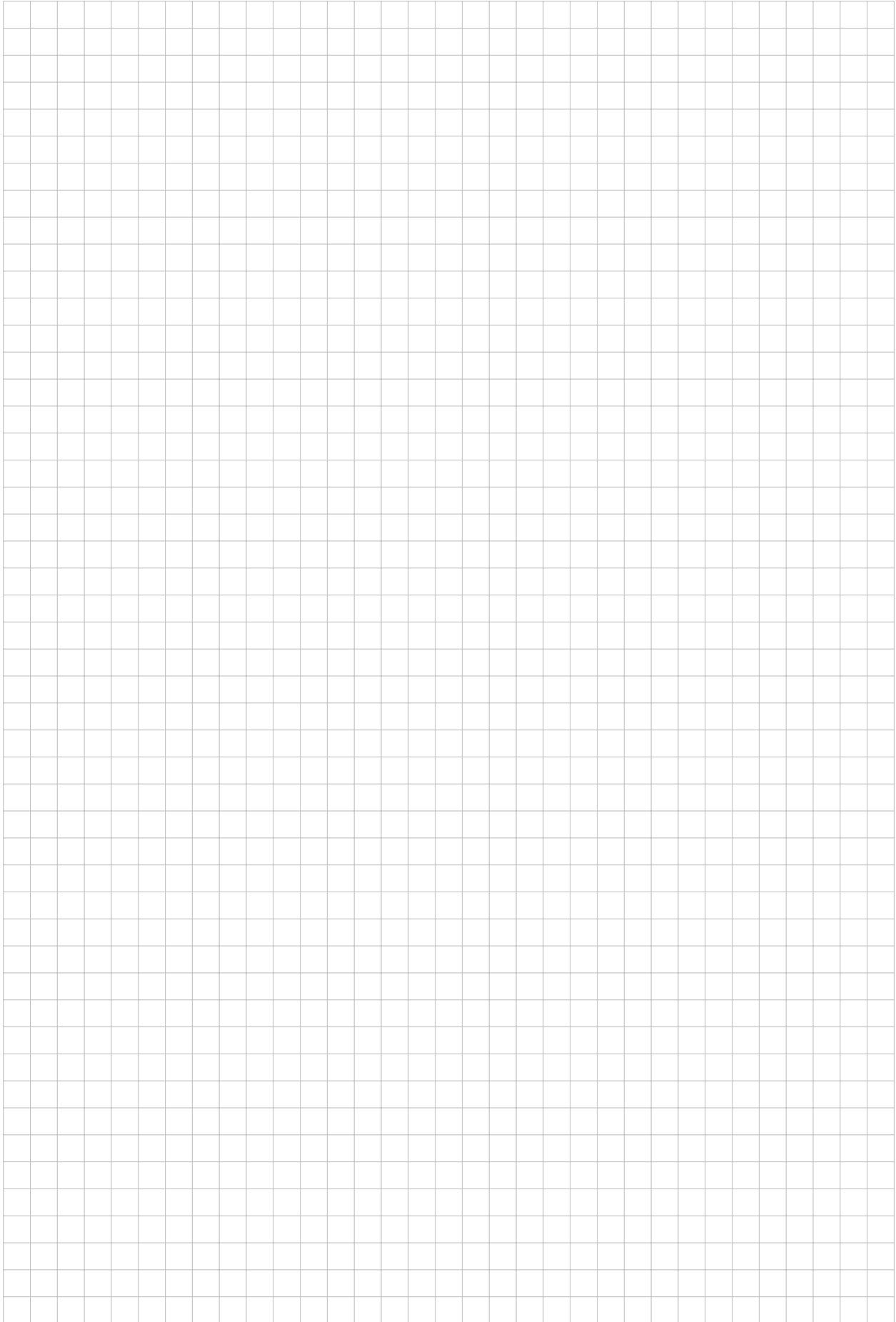
Soit

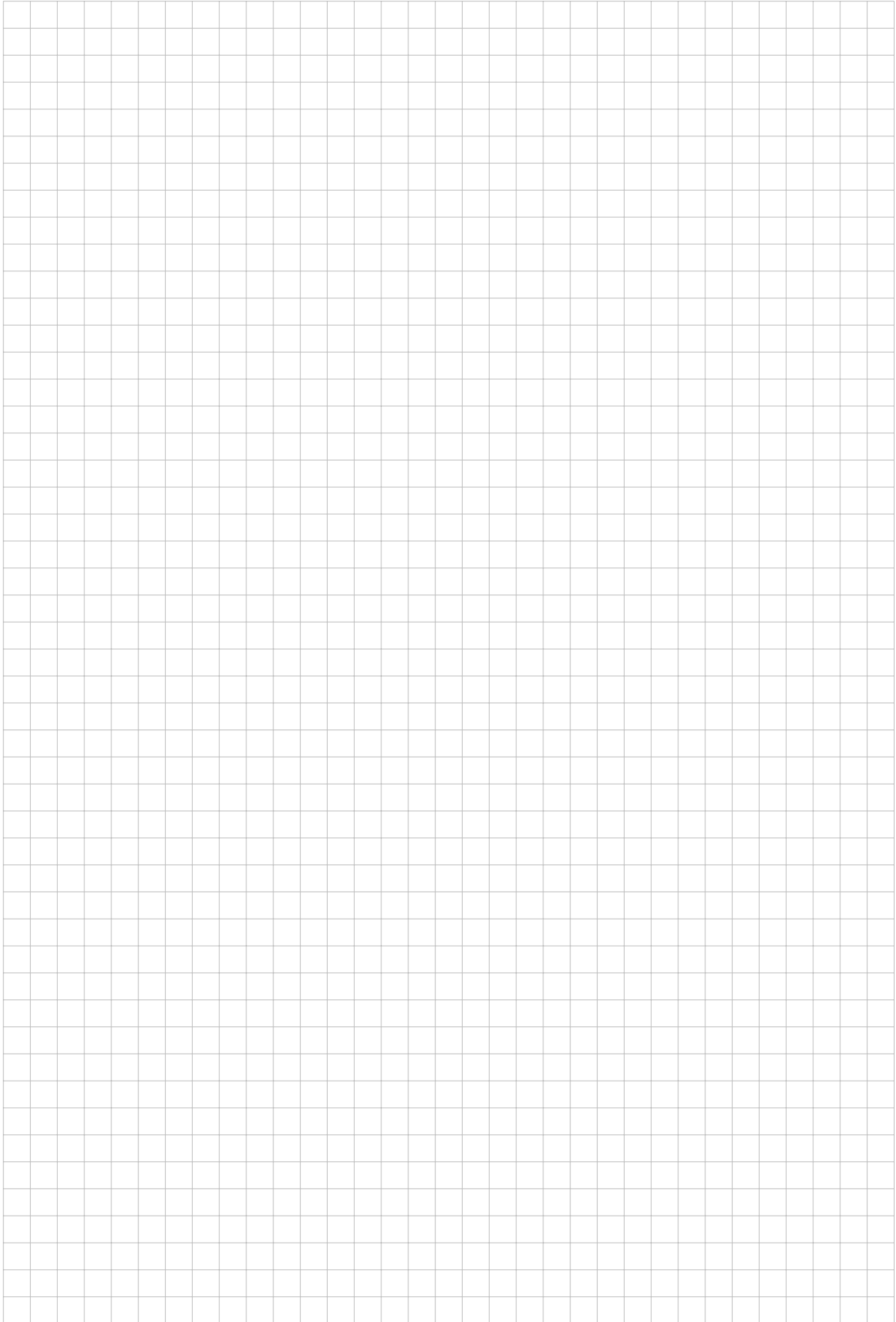
$$D = \{ \mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4 \} .$$

Trouver, en justifiant en détail la démarche, l'image de la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 ,$$

c'est-à-dire déterminer l'ensemble $I = \{ y \in \mathbb{R} : \exists \mathbf{x} \in D \text{ tel que } y = f(\mathbf{x}) \}$.





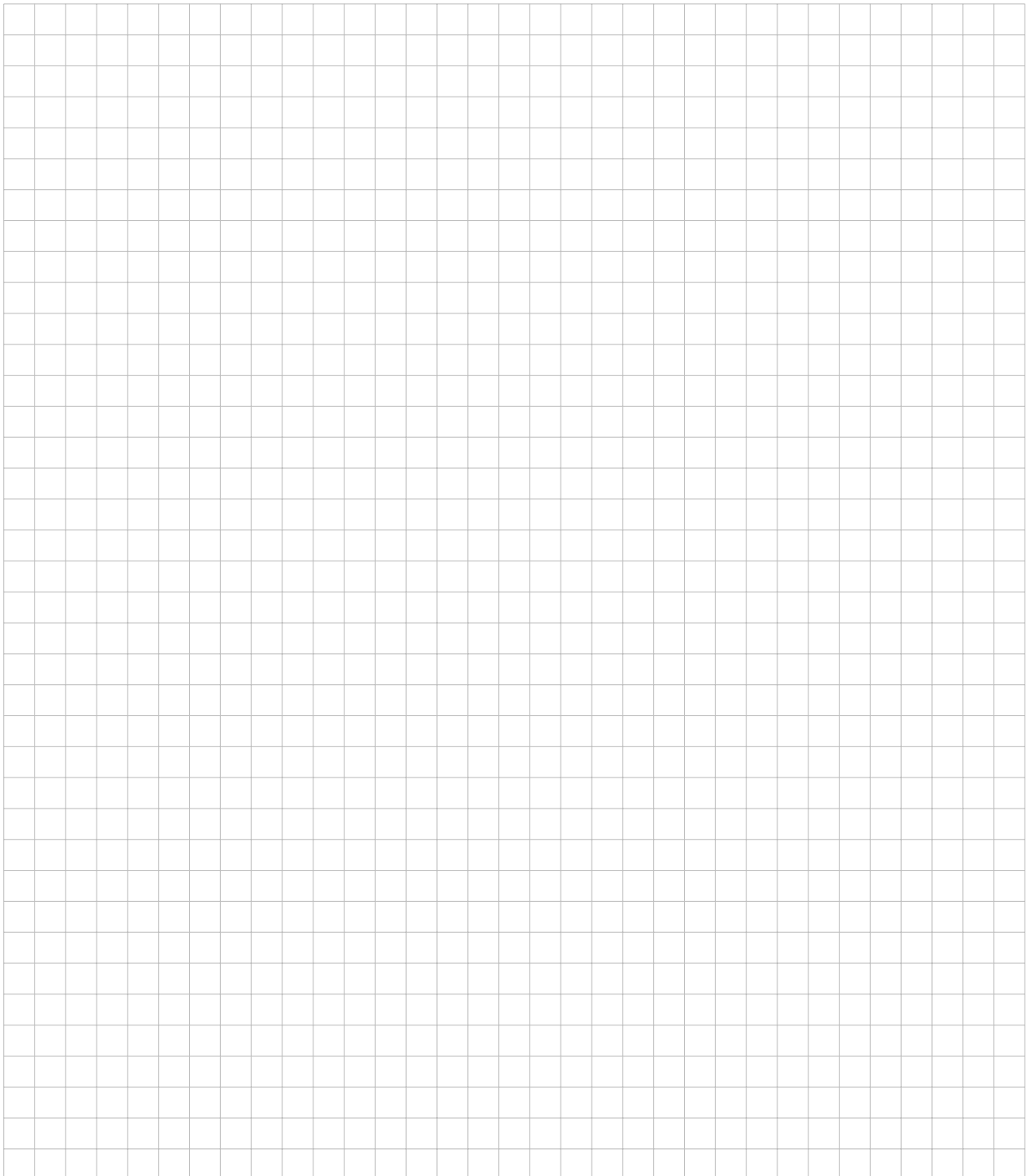


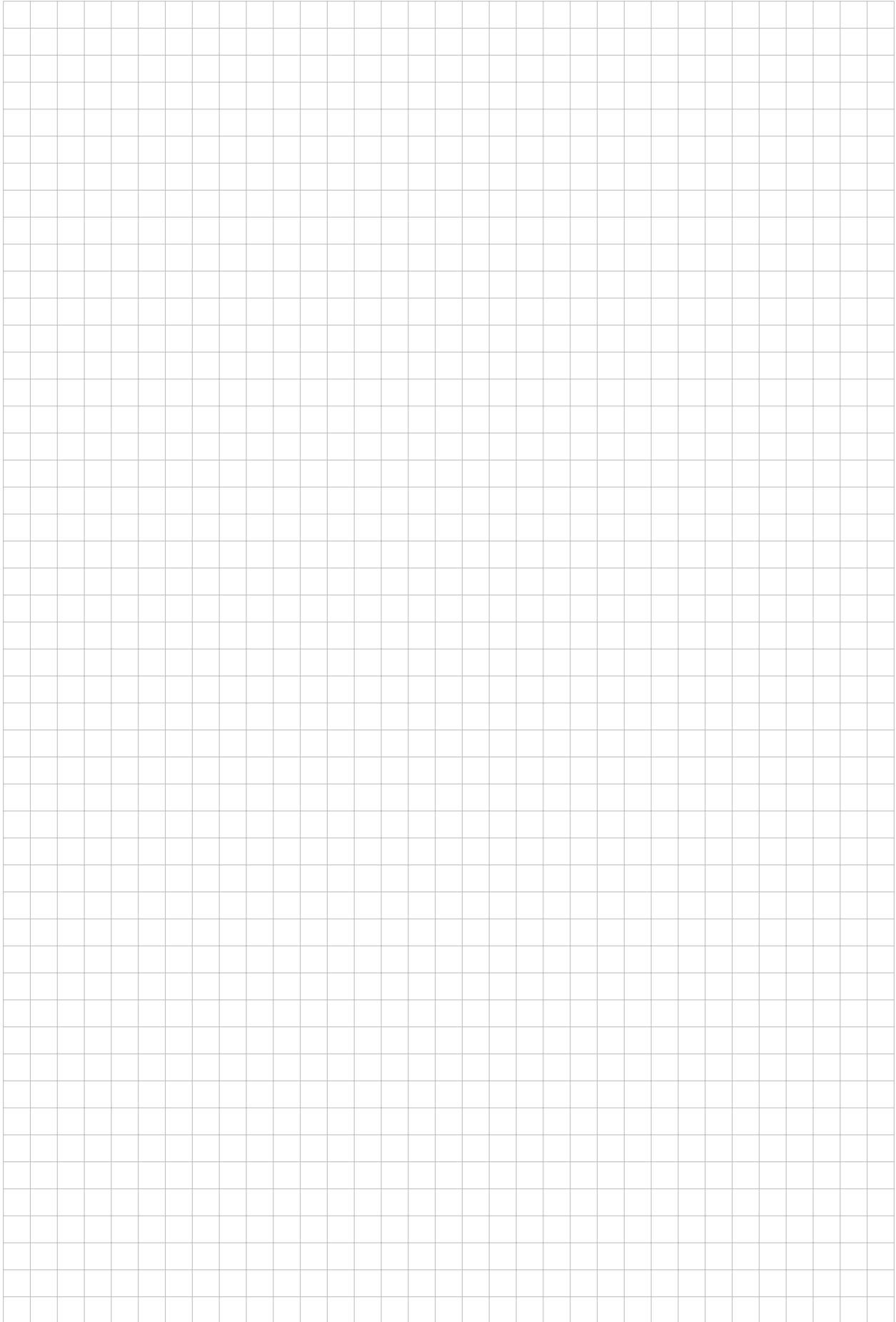
Question 24: Cette question est notée sur 10 points.

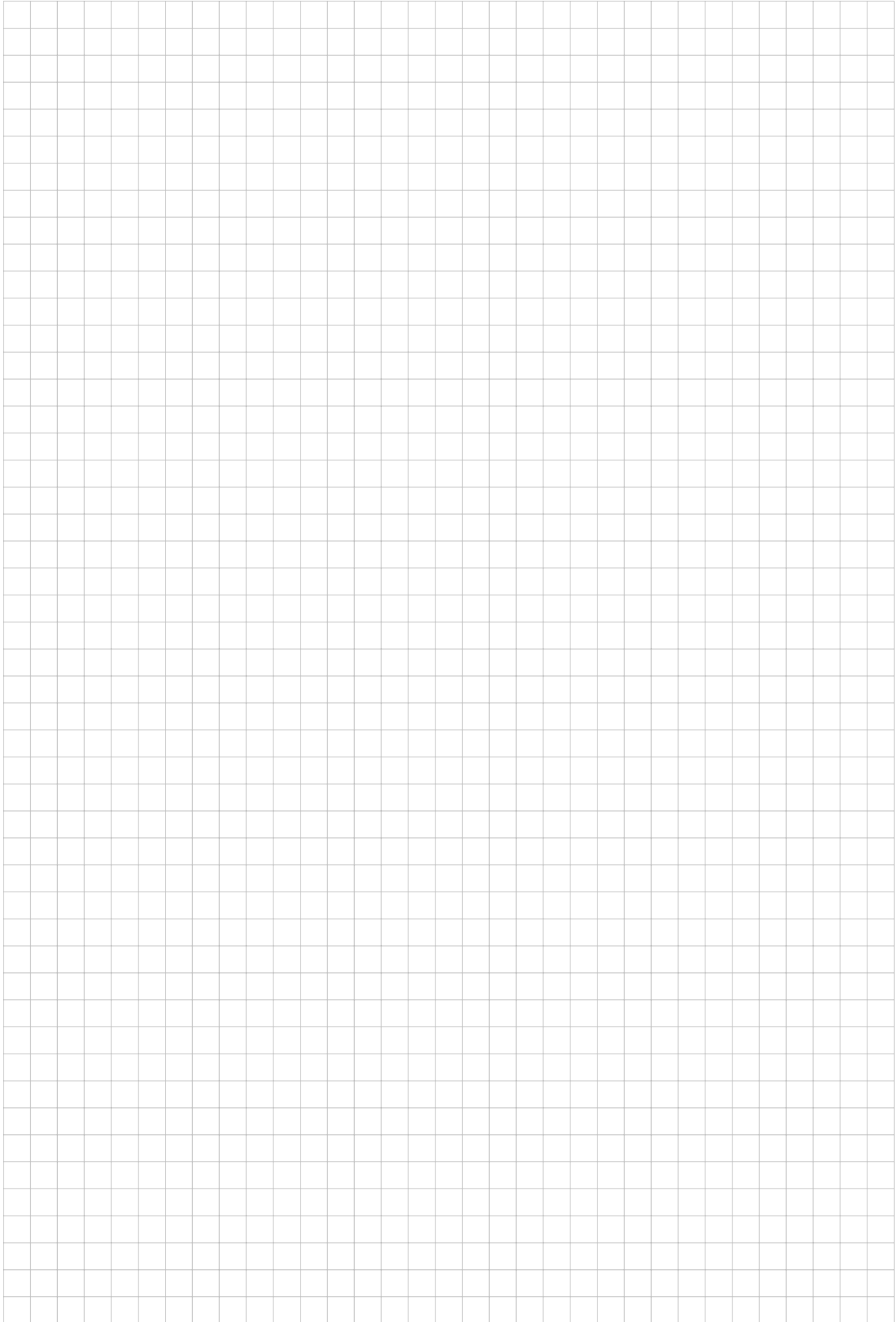
<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	10	<i>Réservé au correcteur</i>
--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	---	--------------------------	----	------------------------------

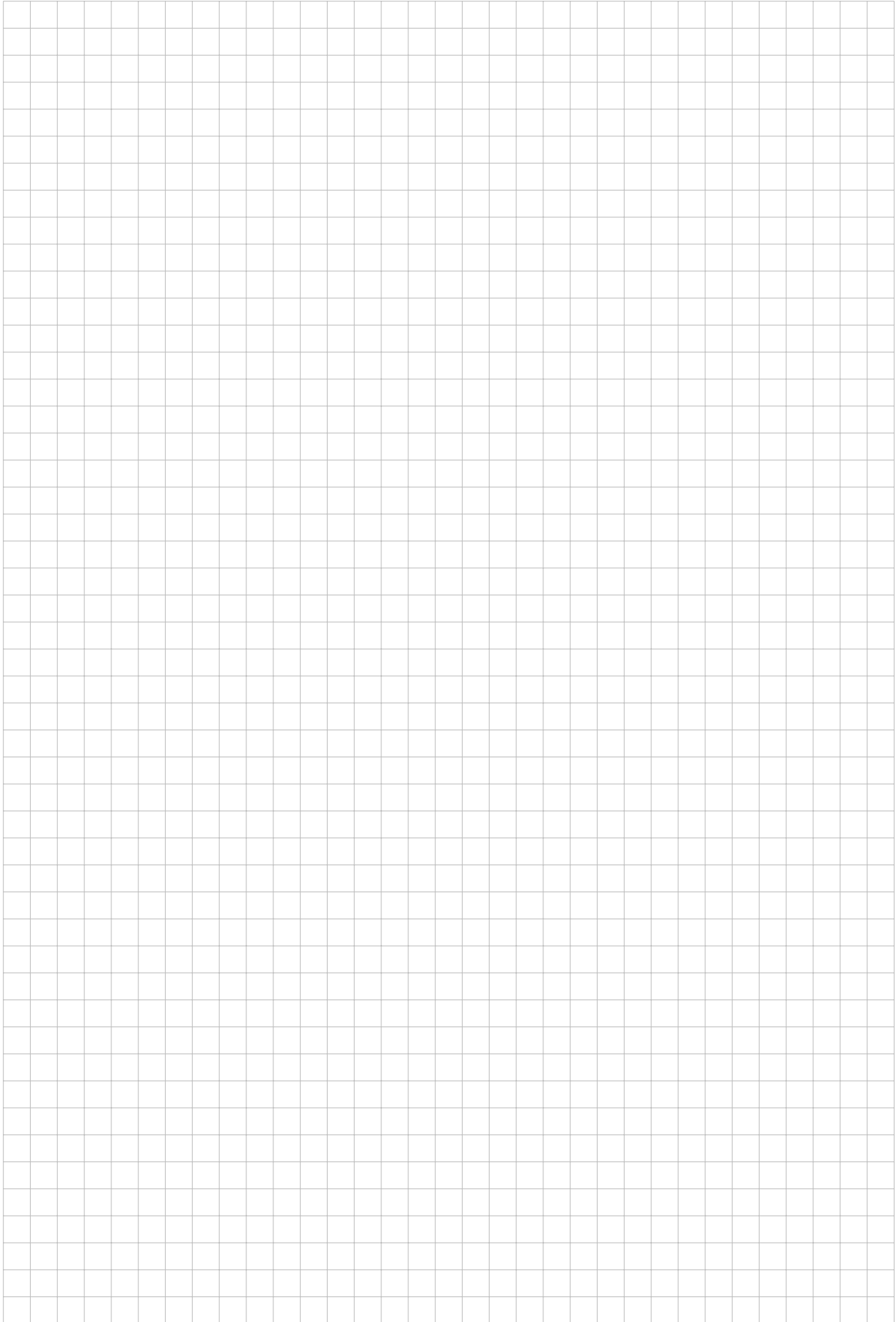
Remarque : le théorème de Bolzano-Weierstrass pour \mathbb{R}^n est supposé connu et peut être utilisé pour répondre aux questions qui suivent.

- (a) Montrer qu'un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si toute suite (x_k) convergente d'éléments $x_k \in X$ converge vers un élément de X .
- (b) Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact non vide. Démontrer que toute fonction $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue sur C est bornée sur C .











Question 25: Cette question est notée sur 10 points.

_0 _1 _2 _3 _4 _5 _6 _7 _8 _9 _10 *Réservé au correcteur*

Soit l'équation différentielle pour une fonction $y(x)$ à valeurs dans \mathbb{R} :

$$y' = 2xy^2$$

Trouver, pour chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ donné, la solution maximale telle que $y(x_0) = y_0$.

