

**Algèbre linéaire avancée II**  
printemps 2026

**Série 14**

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (\*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (\*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (\*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (\*) sera une question ouverte de l'examen final.

**Exercice 1.** Soit  $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  telle que  $B = (b_1, \dots, b_n)$  et  $\det(B) \neq 0$ . Posons  $\alpha = \frac{\prod_{i=1}^n \|b_i\|}{\det(B)}$ .

Soit  $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$  tel que  $v = Bx$  est un vecteur le plus court de  $\text{Im}_{\mathbb{Z}}(B) = B \cdot \mathbb{Z}^n$ . Montrer alors que  $\|x\|_{\infty} \leq \alpha$ .

*Indice :* la règle de Cramer stipule que la solution du système  $Bx = v$  vérifie  $x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(B)}$ , où  $B_i$  est la matrice carrée formée en remplaçant la  $i$ -ième colonne de  $B$  par  $v$ .

**Exercice 2.** Soit  $V = \mathbb{F}_3^3$  muni de la forme bilinéaire standard. Soit  $W = \text{span}\{(1, 1, 1)^T\}$ .

i) Montrer que  $W \subseteq W^{\perp}$ .

ii) Montrer qu'il existe  $0 \neq u \in V \setminus (W + W^{\perp})$ .

Cela montre que pour une forme bilinéaire non-dégénérée, on a pas nécessairement  $W \oplus W^{\perp} = V$ .

**Exercice 3.** Soient  $m$  points  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Cherchons le meilleur polynôme de degré  $d$  approximant ces points ( $d < m$ ).

$$f^* = \arg \min_{\deg(f) \leq d} \sum_{i=1}^m |f(x_i) - y_i|^2.$$

1. Rappeler la forme de la matrice de Vandermonde  $V \in \mathbb{R}^{m \times (d+1)}$  associée aux valeurs  $x_1, \dots, x_m$ .

2. Réécrire le problème en un problème des moindres carrés du type

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^{d+1}} \|Vx - y\|_2^2.$$

3. Trouver la meilleur droite approximant les points  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(2, 3)$ , et  $(-1, 1)$ .

**Exercice 4.** Soit  $A$  une matrice hermitienne. Montrer que la décomposition du théorème spectral  $A = PDP^*$ , où  $P$  est unitaire, implique que

$$A = \sum_{\lambda} \lambda P_{\lambda},$$

où  $P_{\lambda}$  est la projection sur l'espace propre  $E_{\lambda}$  et la somme est prise sur toutes les valeurs propres distinctes de  $A$ .

**Exercice 5.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Le rayon spectral  $\rho$  est défini comme  $\rho = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \text{ valeur propre de } A\}$ . On considère la suite  $A^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer les assertions suivantes :

1. Si  $\rho \geq 1$ , alors  $A^k$  ne converge pas vers la matrice 0.
2. Soit  $B = \lambda I + N$ , où  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est une matrice nilpotente. Si  $|\lambda| < 1$ , alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$ .
3. La suite  $A^k$  converge vers la matrice 0 si et seulement si  $\rho < 1$ .

**Exercice 6.** Trouver toutes les formes normales de Jordan possibles pour une matrice  $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$  dont le polynôme minimal est  $m_A(x) = x^2(x - 1)^3$ .

**Exercice 7.** Soit  $V$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . On considère le sous-espace vectoriel  $W$  engendré par  $f_1(x) = \sin(x)$ ,  $f_2(x) = \cos(x)$ ,  $f_3(x) = \sin(2x)$  et  $f_4(x) = \cos(2x)$ .

Soit  $\phi : W \rightarrow W$  l'application linéaire donnée par dérivation.

1. Vérifier que les fonctions  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  sont linéairement indépendants.
2. Déterminer la matrice de  $\phi$  dans la base  $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  et en déduire la forme normale de Jordan de  $\phi$ .

**Exercice 8.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur un corps  $K$  munie d'une forme bilinéaire symétrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On considère  $W$  un sous-espace de  $V$ .

1. Montrer qu'on a toujours  $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$ .
2. Donner un exemple d'espace vectoriel  $V$  munie d'une forme bilinéaire symétrique et d'un sous-espace  $W$  tel que  $W \neq (W^{\perp})^{\perp}$ .
3. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est non-dégénérée si et seulement si  $W = (W^{\perp})^{\perp}$  pour tout sous-espace  $W$ .

**Exercice 9.** Soit  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$  impaire et  $\phi : V \rightarrow V$  une isométrie satisfaisant  $\det(\phi) = 1$  (voir Take-Home Exam 3 pour la définition d'une isométrie).

Montrer qu'il existe  $v \in V \setminus \{0\}$  tel que  $\phi(v) = v$ .

En déduire que toute rotation en  $\mathbb{R}^3$  possède un axe de rotation (théorème d'Euler).

**Exercice 10.** Soit  $V$  un espace vectoriel réel et  $\phi : V \rightarrow V$  une application linéaire qui n'admet pas de valeurs propres réelles.

Est-il possible que  $\dim(V)$  soit impaire?

Montrer que tout sous-espace  $W$  qui est invariant sous  $\phi$  a une dimension paire.

**Exercice 11.** Soit  $A$  une matrice réelle symétrique, différente de la matrice zéro, telle que tout coefficient sur sa diagonale est zéro.

Montrer qu'une telle matrice est *indéfinie*, c'est-à-dire, qu'il existe deux vecteurs  $u \neq v$  tels que  $u^T A u < 0 < v^T A v$ .

**Exercice 12.** Soit  $\mathbb{R}^{n \times n}$  l'espace des matrices à coefficients réels et on définit l'application linéaire  $\phi : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  par  $\phi(A) = A + A^T$ .

Calculer le polynôme minimal, les valeurs propres et le polynôme caractéristique de l'application  $\phi$ .

**Exercice 13.** Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice symétrique dont au moins une valeur propre a la multiplicité algébrique strictement plus grande que 1. Montrer que  $v, Av, \dots, A^{n-1}v$  est une famille liée pour tout vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$ .