Algèbre linéaire avancée II
printemps 2025

Série 14

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Soit $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ telle que $B = (b_1, \dots, b_n)$ et $\det(B) \neq 0$. Posons $\alpha = \frac{\prod_{i=1}^{n} \|b_i\|}{\det(B)}$.

Soit $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ tel que $v = Bx$ est un vecteur le plus court de $\mathrm{Im}_{\mathbb{Z}}(B) = B \cdot \mathbb{Z}^n$. Montrer alors que $\|x\|_\infty \leq \alpha$.

Indice : la règle de Cramer stipule que la solution du système $Bx = v$ vérifie $x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(B)}$, où B_i est la matrice carrée formée en remplaçant la i-ième colonne de B par v.

Exercice 2. Soit $V = \mathbb{F}_3^3$ muni de la forme bilinéaire standard. Soit $W = \mathrm{span}\{(1,1,1)^T\}$.

i) Montrer que $W \subseteq W^\perp$.

ii) Montrer qu'il existe $0 \neq u \in V \setminus (W + W^\perp)$.

Cela montre que pour une forme bilinéaire non-dégénérée, on a pas nécessairement $W \oplus W^\perp = V$.

Exercice 3. Soient m points (x_i, y_i), $i = 1, \dots, m$ dans $\mathbb{R}^2$. Cherchons le meilleur polynôme de degré d approximant ces points ($d < m$).

$$f^* = \arg \min_{\deg(f) \leq d} \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - y_i|^2.$$

1. Rappeler la forme de la matrice de Vandermonde $V \in \mathbb{R}^{m\times(d+1)}$ associée aux valeurs $x_1, \dots, x_m$.

2. Réécrire le problème en un problème des moindres carrés du type
$$x^* = \arg \min_{x\in\mathbb{R}^{d+1}} \|Vx - y\|_2^2.$$

3. Trouver la meilleur droite approximant les points $(0,0), (1,-1), (2,3)$, et $(-1,1)$.

Exercice 4. Soit A une matrice hermitienne. Montrer que la décomposition du théorème spectral $A = PDP^*$, où P est unitaire, implique que

$$A = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda,$$

où P_λ est la projection sur l'espace propre E_λ et la somme est prise sur toutes les valeurs propres distinctes de A.

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Le rayon spectral ρ est défini comme $\rho = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \text{ valeur propre de } A\}$. On considère la suite A^k pour $k \in \mathbb{N}$. Montrer les assertions suivantes :

1. Si $\rho \geq 1$, alors A^k ne converge pas vers la matrice 0.
2. Soit $B = \lambda I + N$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est une matrice nilpotente. Si $|\lambda| < 1$, alors $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$.
3. La suite A^k converge vers la matrice 0 si et seulement si $\rho < 1$.

Exercice 6. Trouver toutes les formes normales de Jordan possibles pour une matrice $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ dont le polynôme minimal est $m_A(x) = x^2(x-1)^3$.

Exercice 7. Soit V l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On considère le sous-espace vectoriel W engendré par $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$, $f_3(x) = \sin(2x)$ et $f_4(x) = \cos(2x)$.
Soit $\phi : W \to W$ l'application linéaire donnée par dérivation.

1. Vérifier que les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 sont linéairement indépendants.
2. Déterminer la matrice de ϕ dans la base $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ et en déduire la forme normale de Jordan de ϕ.

Exercice 8. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K munie d'une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère W un sous-espace de V.

1. Montrer qu'on a toujours $W \subseteq (W^\perp)^\perp$.
2. Donner un exemple d'espace vectoriel V munie d'une forme bilinéaire symétrique et d'un sous-espace W tel que $W \neq (W^\perp)^\perp$.
3. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non-dégénérée si et seulement si $W = (W^\perp)^\perp$ pour tout sous-espace W.

Exercice 9. Soit $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n impaire et $\phi : V \to V$ une isométrie satisfaisant $\det(\phi) = 1$ (voir Take-Home Exam 3 pour la définition d'une isométrie).
Montrer qu'il existe $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $\phi(v) = v$.
En déduire que toute rotation en $\mathbb{R}^3$ possède un axe de rotation (théorème d'Euler).

Exercice 10. Soit V un espace vectoriel réel et $\phi : V \to V$ une application linéaire qui n'admet pas de valeurs propres réelles.
Est-il possible que $\dim(V)$ soit impaire?
Montrer que tout sous-espace W qui est invariant sous ϕ a une dimension paire.

Exercice 11. Soit A une matrice réelle symétrique, différente de la matrice zéro, telle que tout coefficient sur sa diagonale est zéro.
Montrer qu'une telle matrice est *indéfinie*, c'est-à-dire, qu'il existe deux vecteurs $u \neq v$ tels que $u^T Au < 0 < v^T Av$.

Exercice 12. Soit $\mathbb{R}^{n\times n}$ l'espace des matrices à coefficients réels et on définit l'application linéaire $\phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ par $\phi(A) = A + A^T$.
Calculer le polynôme minimal, les valeurs propres et le polynôme caractéristique de l'application ϕ.

Exercice 13. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont au moins une valeur propre a la multiplicité algébrique strictement plus grande que 1. Montrer que $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ est une famille liée pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$.