

---

**Algèbre linéaire avancée II**  
printemps 2026

---

**Série 13 – Corrigé**

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (\*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (\*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (\*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (\*) sera une question ouverte de l'examen final.

---

**Exercice 1.** (+) Synthèse des résultats sur la forme normale de Jordan.

Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice et  $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sa forme normale de Jordan. Appelons un bloc de Jordan ayant  $\lambda$  sur sa diagonale un bloc *associé* à  $\lambda$ . Alors

1. Les blocs de  $J$  sont associés aux valeurs propres de  $A$ .
2. La somme des tailles des blocs associés à la même valeur  $\lambda$  est égale à la multiplicité algébrique de  $\lambda$ .
3. Le nombre de blocs associés à la même valeur  $\lambda$  est égal à la multiplicité géométrique de  $\lambda$ .
4. La taille du plus gros bloc de Jordan associé à  $\lambda$  est égale à la multiplicité de  $\lambda$  dans le polynôme minimal de  $A$ .
5. La forme normale de Jordan est unique à ordre des blocs près.

**Solution.** *Il s'agit d'une synthèse des résultats.*

**Exercice 2.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Montrer, à l'aide de l'exercice précédent, que  $A$  est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal n'admet que des racines simples (c'est-à-dire leur multiplicité est 1).

En déduire que si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  vérifie  $A^3 = A$ , alors  $A$  est diagonalisable.

**Solution.** *D'après le point 4 de l'exercice 1, la multiplicité d'une valeur propre  $\lambda$  dans le polynôme minimal donne la taille du plus gros bloc associé à cette valeur.*

*Par conséquent, chaque bloc est de taille 1 dans la forme de Jordan de  $A$ . Celle-ci est donc une matrice diagonale, et  $A = PJP^{-1}$  donne exactement la diagonalisation de  $A$ .*

*Dans le cas où  $A^3 = A$ , le polynôme  $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$  annule  $A$ . Le polynôme minimal de  $A$  divise donc  $x^3 - x$ , et ses racines doivent également être simples.*

**Exercice 3.** Soit  $T : \mathbb{C}^{12} \rightarrow \mathbb{C}^{12}$  un endomorphisme admettant pour polynômes caractéristique et minimal

$$p_T(x) = (x - 6)^4(x + 3)^6x^2, \quad m_T(x) = (x - 6)^2(x + 3)^3x.$$

Montrer qu'il n'existe que 6 tels endomorphismes à conjugaison par isomorphisme près ( $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$  sont considérés comme la même application pour  $\phi$  un automorphisme de  $\mathbb{C}^{12}$ ).

**Solution.** Il s'agit ici de compter le nombre de formes normales de Jordan possibles, sans compter les permutations entre blocs.

Les blocs associés à la valeur 6 vérifient que : la somme de leurs tailles est 4 et le plus gros bloc est de taille 2. Les deux seules possibilités pour les tailles des blocs sont donc  $4 = 2 + 2$  et  $4 = 2 + 1 + 1$ .

Similairement, les trois possibilités pour 3 sont :  $6 = 3 + 1 + 1 + 1$ ,  $6 = 3 + 2 + 1$ , et  $6 = 3 + 3$ .

Il n'y a qu'une possibilité d'agencement des blocs associés à 0 ( $2 = 1 + 1$ ), et donc le nombre de formes normales de Jordan différentes est  $2 \times 3 \times 1 = 6$ .

**Exercice 4.** Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 108 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -324 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 279 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -115 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont 1, 2, -3. En déduire sa forme normale de Jordan.

**Solution.** En développant par la dernière colonne, le polynôme caractéristique  $p_A$  de  $A$  est

$$p_A(\lambda) = \lambda^8 + 2\lambda^7 - 17\lambda^6 - 16\lambda^5 + 115\lambda^4 - 22\lambda^3 - 279\lambda^2 + 324\lambda - 108.$$

Des divisions successives par  $\lambda - 1$  donnent le produit  $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda^5 + 5\lambda^4 - 5\lambda^3 - 45\lambda^2 + 108)$ , et de nouvelles divisions par  $\lambda + 3$  et  $\lambda - 2$  donnent  $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3)^3(\lambda - 2)^2$ . Par conséquent, les valeurs 1, 2, et -3 ont pour multiplicité algébrique 3, 2 et 3 respectivement.

Pour connaître la décomposition de Jordan et le polynôme minimal, il s'agit d'abord de calculer la multiplicité géométrique de chaque valeur. Or on remarque immédiatement que  $\text{rang}(A - \lambda I) = 7$  pour  $\lambda = 1, 2, -3$ , et donc que les multiplicités géométriques sont toutes 1. La forme de Jordan est donc composée de trois blocs diagonaux, chacun associé à une des valeurs propres. De plus, le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , et  $J$  sa forme normale de Jordan.

Montrer que les valeurs propres de  $e^J$  sont de la forme  $e^\lambda$ , où  $\lambda$  est une valeur propre de  $J$ . Montrer que les multiplicités algébriques de  $e^\lambda$  et  $\lambda$  sont égales et en déduire que

$$\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}.$$

En déduire que l'application  $e^\bullet$  de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  vers  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  n'est pas surjective. Est-elle injective?

**Solution.** Les polynômes caractéristiques de  $A$  et de  $J$  sont identiques, donc le nombre d'apparitions d'une valeur propre  $\lambda$  sur la diagonale de  $J$  est égal à sa multiplicité algébrique. Pour chaque bloc de Jordan  $B$  associé à une valeur propre  $\lambda$ , la matrice  $B^k$  est triangulaire supérieure avec  $\lambda^k$  sur sa diagonale. Par suite, l'exponentielle  $e^B$  est triangulaire supérieure avec  $e^\lambda$  sur sa diagonale.

$J$  est bloc-diagonale et son exponentielle est également bloc-diagonale avec pour blocs les exponentielles des blocs de  $J$ . Par conséquent,  $e^J$  est triangulaire supérieure avec  $e^\lambda$  sur sa diagonale.

Notons que le nombre de  $e^\lambda$  dans la diagonale de  $e^J$  est égal au nombre de  $\lambda$  dans la diagonale de  $J$ . C'est pourquoi la multiplicité algébrique de  $e^\lambda$  comme valeur propre de  $e^J$  est égale à celle de  $\lambda$  comme valeur propre de  $J$ .

La conclusion découle du fait que le déterminant est le produit des valeurs propres et la trace est la somme des valeurs propres:

$$\det(e^A) = \det(e^J) = \prod_{\lambda} e^\lambda = e^{\sum_{\lambda} \lambda} = e^{\text{Tr}(A)}.$$

Comme la fonction réelle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x$  est strictement positive pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on déduit du résultat précédent que  $\det(e^A) > 0$  lorsque  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ce qui montre que  $e^\bullet$  n'est pas surjective.

Pour la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient  $e^B = I$  et comme on a aussi  $e^0 = I$  on conclut que l'application  $e^\bullet$  n'est pas injective.

**Exercice 6.** Soit  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que  $A = -A^T$  et  $\text{tr}(B) = 0$ .

Montrer que la matrice  $e^A$  est orthogonale et que la matrice  $e^B$  appartient à  $SL_n(\mathbb{R})$ .

**Solution.** On calcule

$$e^A(e^A)^T = e^A e^{A^T} = e^{A+A^T} = I$$

où on a utilisé la commutativité des matrices  $A$  et  $A^T$ . Le calcul montre que  $e^A$  est une matrice orthogonale.

On sait que  $\det(e^B) = e^{\text{tr}(B)} = e^0 = 1$  et on conclut que  $e^B$  appartient à  $SL_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 7.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  un bloc de Jordan avec  $\lambda$  sur la diagonale. Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  un vecteur. Montrer que

$$(e^{tA}x)_i = \sum_{j=i}^n \frac{x_j t^{j-i}}{(j-i)!} e^{\lambda t}.$$

**Solution.** On peut écrire  $A = D + N$  où  $D$  est diagonale et  $N$  est nilpotente. Comme  $D$  et  $N$  commutent, on a que  $e^{At} = e^{Dt} e^{Nt}$ . Il est facile de voir que  $e^{Dt} = e^{\lambda t} I$ . Pour trouver  $e^{Nt}$ , on observe que

$$N_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+1 = j \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

donc on obtient que

$$(N^k)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+k = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dès lors,

$$e^{Nt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & \cdots & & & 1 & t \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que

$$(e^{Nt})_{ij} = \begin{cases} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Finalement, on obtient que  $e^{At}x = e^{Dt}e^{Nt}x = e^{\lambda t}e^{Nt}x$ , donc

$$(e^{At}x)_i = e^{\lambda t} \sum_{j=1}^n (e^{Nt})_{ij} x_j = e^{\lambda t} \sum_{j=i}^n \frac{x_j t^{j-i}}{(j-i)!}.$$

**Exercice 8.** Soit  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une application telle que

$$Q(x) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3.$$

- a) Trouver une matrice symétrique  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  telle que  $Q(x) = x^T A x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ .
- b) Soit  $B$  la base canonique. Trouver une base  $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ , telle que

$$Q(x) = [x]_{B'}^T D [x]_{B'}$$

où  $D$  est une matrice diagonale.

**Solution.** a) *Le matrice  $A$  que l'on cherche est*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

- b) *On commence par calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $A$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (9 - \lambda)(7 - \lambda)(11 - \lambda) - 16(11 - \lambda) - 16(7 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 207\lambda + 405 \\ &= -(\lambda - 15)(\lambda - 9)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

*ainsi les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1 = 15$ ,  $\lambda_2 = 9$  et  $\lambda_3 = 3$ . Le premier vecteur propre satisfait  $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$ . On trouve  $v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et de la*

*même façon on obtient  $v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . La matrice  $P_{B'B}$  qui satisfait  $[x]_B = P_{B'B}[x]_{B'}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$  est ainsi la matrice avec les colonnes  $v_1, v_2$  et  $v_3$ :*

$$P_{B'B} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Maintenant, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$*

$$\begin{aligned} Q(x) &= [x]_B^T A [x]_B \\ &= (P_{B'B}[x]_{B'})^T A (P_{B'B}[x]_{B'}) \\ &= [x]_{B'}^T P_{B'B}^T A P_{B'B} [x]_{B'} \\ &= [x]_{B'}^T D [x]_{B'}. \end{aligned}$$

*où*

$$D = (P_{B'B})^T A P_{B'B} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

*est une matrice diagonale.*

**Exercice 9.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  dont le polynôme caractéristique est  $p_A(x) = -(x-1)^2(x-3)^3$ . Les dimensions de l'image de  $(A - \lambda I)$  sont 3 pour  $\lambda = 1$  et 4 pour  $\lambda = 3$ . La forme normale de Jordan de la matrice  $A$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

Aucune des autres réponses n'est correcte.

**Solution.** *Aucune des autres réponses n'est correcte.*

**Exercice 10.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$  une matrice avec polynôme caractéristique

$$p_A(x) = (x-1)^5(x+1)^2(x-2)$$

et polynôme minimal

$$m_A(x) = (x-1)^2(x+1)(x-2).$$

Soit  $J$  la forme normale de Jordan de la matrice  $A$ . Alors

- $J$  a au plus 4 blocs de Jordan pour la valeur propre 1.
- $J$  a au plus 6 blocs de Jordan.
- $J$  a un seul bloc de Jordan pour la valeur propre -1.
- Aucune des autres réponses n'est correcte.

**Solution.**  *$J$  a au plus 4 blocs de Jordan pour la valeur propre 1.*

**Exercice 11.** (\*) En utilisant la forme normale de Jordan montrer que toute matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est semblable à sa transposée  $A^T$ .

**Solution.**