Deux commentaires :

- Pour compresser une séquence donnée, faut-il toujours recalculer un dictionnaire?

  non

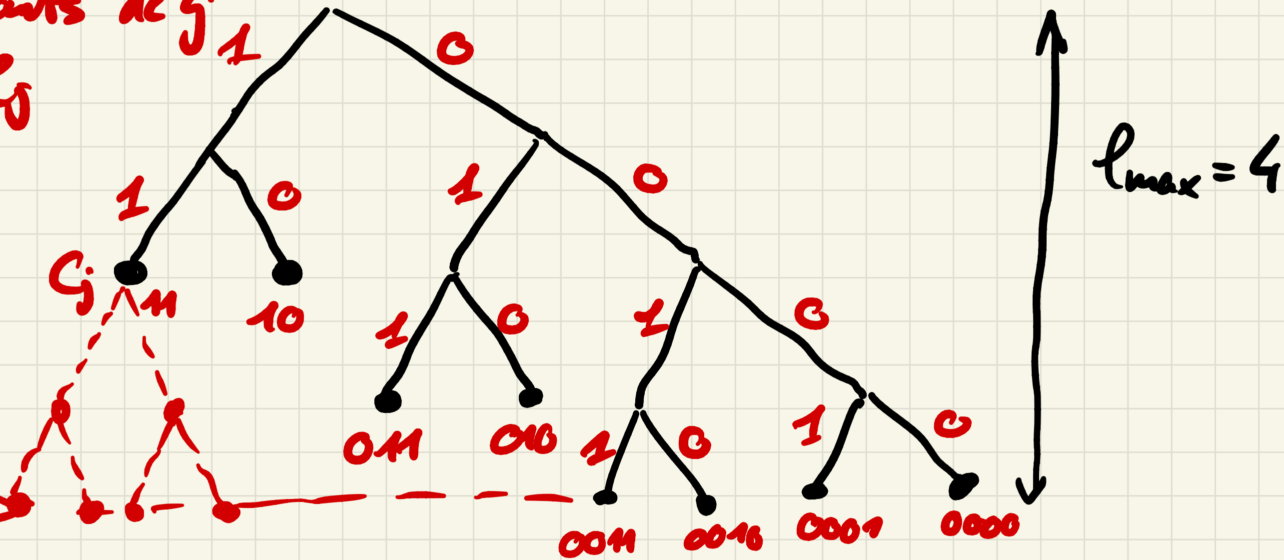
- Comment faire pour compresser des séquences de 0 et de 1 ?

  0001 0010 0111 0000 1 0100 0 0 ...

Preuve de l'inégalité de Kraft :

\# descendants de c_j

$= 2^{\ell_{max}-\ell_j}$



au plus $2^{\ell_{max}}$ mots de code

$C = \{11, 10, 011, 010, 0011, \ldots\}$

$$\sum_{j=1}^{n} 2^{\ell_{max}-\ell_j} \leq 2^{\ell_{max}} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j} \leq 1 \quad \#$$

Preuve du théorème de Shannon :

A montrer : $H(x) \leq L(C)$

$$H(x) - L(C) = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_j}\right) - \sum_{j=1}^{n} p_j \ell_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_j \underbrace{\left(\log_2\left(\frac{1}{p_j}\right) - \ell_j\right)}$$

$$= \log_2\left(\frac{1}{p_j}\right) + \log_2\left(2^{-\ell_j}\right) = \log_2\left(\frac{2^{-\ell_j}}{p_j}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \log_2\left(\frac{2^{-\ell_j}}{p_j}\right)$$

Concavité de $\log_2$: $(\forall x_j > 0)$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \log_2(x_j) \leq \log_2\left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right)$$

Donc

$$x_j = \frac{2^{-\ell_j}}{p_j}$$

$$H(X) - L(C) \leq \log_2\left(\sum_{j=1}^{n} \cancel{p_j} \frac{2^{-\ell_j}}{\cancel{p_j}}\right)$$

$$= \log_2\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} 2^{-\ell_j}}_{\leq 1 \text{ (Kraft)}}\Big) \leq \log_2(1) = 0 \quad \#$$