
Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 13

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Synthèse des résultats sur la forme normale de Jordan.

Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice et $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sa forme normale de Jordan. Appelons un bloc de Jordan ayant λ sur sa diagonale un bloc *associé* à λ . Alors

1. Les blocs de J sont associés aux valeurs propres de A .
2. La somme des tailles des blocs associés à la même valeur λ est égale à la multiplicité algébrique de λ .
3. Le nombre de blocs associés à la même valeur λ est égal à la multiplicité géométrique de λ .
4. La taille du plus gros bloc de Jordan associé à λ est égale à la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de A .
5. La forme normale de Jordan est unique à ordre des blocs près.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Montrer, à l'aide de l'exercice précédent, que A est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal n'admet que des racines simples (c'est-à-dire leur multiplicité est 1).

En déduire que si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ vérifie $A^3 = A$, alors A est diagonalisable.

Exercice 3. Soit $T : \mathbb{C}^{12} \rightarrow \mathbb{C}^{12}$ un endomorphisme admettant pour polynômes caractéristique et minimal

$$p_T(x) = (x - 6)^4(x + 3)^6x^2, \quad m_T(x) = (x - 6)^2(x + 3)^3x.$$

Montrer qu'il n'existe que 6 tels endomorphismes à conjugaison par isomorphisme près ($\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ sont considérés comme la même application pour ϕ un automorphisme de \mathbb{C}^{12}).

Exercice 4. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 108 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -324 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 279 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -115 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont 1, 2, -3. En déduire sa forme normale de Jordan.

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, et J sa forme normale de Jordan.

Montrer que les valeurs propres de e^J sont de la forme e^λ , où λ est une valeur propre de J . Montrer que les multiplicités algébriques de e^λ et λ sont égales et en déduire que

$$\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}.$$

En déduire que l'application e^\bullet de $\mathbb{R}^{n \times n}$ vers $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective. Est-elle injective?

Exercice 6. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que $A = -A^T$ et $\text{tr}(B) = 0$.

Montrer que la matrice e^A est orthogonale et que la matrice e^B appartient à $\text{SL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ un bloc de Jordan avec λ sur la diagonale. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Montrer que

$$(e^{tA}x)_i = \sum_{j=i}^n \frac{x_j t^{j-i}}{(j-i)!} e^{\lambda t}.$$

Exercice 8. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que

$$Q(x) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3.$$

a) Trouver une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ telle que $Q(x) = x^T A x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Soit B la base canonique. Trouver une base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, telle que

$$Q(x) = [x]_{B'}^T D [x]_{B'}$$

où D est une matrice diagonale.

Exercice 9. Soit $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ dont le polynôme caractéristique est $p_A(x) = -(x-1)^2(x-3)^3$. Les dimensions de l'image de $(A - \lambda I)$ sont 3 pour $\lambda = 1$ et 4 pour $\lambda = 3$. La forme normale de Jordan de la matrice A est

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$

Aucune des autres réponses n'est correcte.

Exercice 10. Soit $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ une matrice avec polynôme caractéristique

$$p_A(x) = (x-1)^5(x+1)^2(x-2)$$

et polynôme minimal

$$m_A(x) = (x-1)^2(x+1)(x-2).$$

Soit J la forme normale de Jordan de la matrice A . Alors

- J a au plus 4 blocs de Jordan pour la valeur propre 1.
- J a au plus 6 blocs de Jordan.
- J a un seul bloc de Jordan pour la valeur propre -1.
- Aucune des autres réponses n'est correcte.

Exercice 11. (*) En utilisant la forme normale de Jordan montrer que toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est semblable à sa transposée A^T .