

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2025

Série 13

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Trouver e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ où $x, y \in \mathbb{C}$.

b) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ qui satisfait $A^2 = A$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $A^3 = A$. Alors on a que

- $e^{tA} = I_n + A \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} - A^2.$
- $e^{tA} = I_n + A \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!}.$
- $e^{tA} = I_n + A \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} + A^2.$
- Aucune des autres réponses n'est correcte.

Exercice 3. Montrer le lemme 6.3. du polycopié.

On considère le système suivant

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1(t) &= a_{11}\mathbf{x}_1(t) + \cdots + a_{1n}\mathbf{x}_n(t) \\ \mathbf{x}'_2(t) &= a_{21}\mathbf{x}_1(t) + \cdots + a_{2n}\mathbf{x}_n(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}'_n(t) &= a_{n1}\mathbf{x}_1(t) + \cdots + a_{nn}\mathbf{x}_n(t) \end{aligned} \tag{1}$$

où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \text{ est une solution du système (1)}\}$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Montrer que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Exercice 5. Soient $A, B, P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telles que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Montrer que $e^A = P^{-1}e^B P$.

Exercice 6. Montrer que $e^{A+B} = e^A e^B$ si $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ commutent. En déduire que e^\bullet est une application de $\mathbb{C}^{n \times n}$ vers $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Trouver deux matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telles que $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Exercice 7. Trouver la solution du système $x' = Ax$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Considérons l'équation différentielle de second ordre où $\lambda > 0$ et $u \in C^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \\ u(0) = \alpha \text{ et } u'(0) = \beta. \end{cases} \quad (2)$$

1. Reformuler le problème en une équation en dimension 2 de la forme $x' = Ax$ avec $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

2. Calculer e^{At} et en déduire la solution u du problème initial (2).

$$\text{Formules : } \cos(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \text{ et } \sin(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Exercice 9. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, et J sa forme normale de Jordan.

Montrer que les valeurs propres de e^J sont de la forme e^λ , où λ est une valeur propre de J . Montrer que les multiplicités algébriques de e^λ et λ sont égales et en déduire que

$$\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}.$$

En déduire que l'application e^\bullet de $\mathbb{R}^{n \times n}$ vers $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective. Est-elle injective?

Exercice 10. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que $A = -A^T$ et $\text{tr}(B) = 0$.

Montrer que la matrice e^A est orthogonale et que la matrice e^B appartient à $\text{SL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Trouver e^{tA} pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Utiliser ceci pour trouver la solution du système $x' = Bx$ où

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ un bloc de Jordan avec λ sur la diagonale. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Montrer que

$$(e^{tA}x)_i = \sum_{j=i}^n \frac{x_j t^{j-i}}{(j-i)!} e^{\lambda t}.$$

Exercice 13. On considère un système différentiel $x' = Ax$ et on suppose que A est une matrice nilpotente, si bien que $A^m = 0$ pour un certain entier $m > 0$. Montrer que, dans une solution $x(t) = (x_1(t) \ \cdots \ x_n(t))^T$ chaque fonction $x_i(t)$ est un polynôme en t et qu'il est de degré au plus $m - 1$.

Exercice 14. (*) Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ inversible. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^m est diagonalisable pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$.

Donner un contre-exemple lorsque A n'est pas inversible.